Une introduction à la Ludique et à ses applications à la Pragmatique

Alain Lecomte, Myriam Quatrini, Marie-Renée Fleury-Donnadieu

Introduction à la Ludique et applications à la Pragmatique

ANR ”Prelude”*

1 Introduction

1.1 Pourquoi la ludique ?

L’idée de la ludique vient d’une réflexion de Jean-Yves Girard sur le sens profond de la logique. On sait que, traditionnellement, le logicien vit dans un univers dualiste : d’un côté la syntaxe, les systèmes d’axiomes etc. et de l’autre la sémantique, c’est-à-dire la théorie des modèles. Il en est ainsi depuis, en gros, Tarski. Van Heijenhoort, repris plus tard par Hintikka ([10]), a mis en relief l’opposition de deux tendances dans l’histoire de la logique moderne, l’une représentée essentiellement par Frege, le premier Russell et le Cercle de Vienne dans sa période syntaxique, pour laquelle la logique est un langage universel (elle ne possède pas de dehors), l’autre par Shröder, Löwenheim, Gödel et Tarski pour laquelle on peut au contraire faire varier les interprétations grâce à la théorie des modèles, relativisant ainsi la portée de la logique et lui conférant plutôt le caractère d’un calcul.
Dans la conception traditionnelle, une formule, pour être validée, doit faire l’objet d’une *preuve* (ou plutôt d’une démonstration, une preuve étant une classe d’équivalence de démonstrations), (à moins qu’on soit dans un système avec une méthode de décision qui évite de faire la preuve, comme en logique propositionnelle), mais pour être invalidée, il suffit de lui fournir un *contre-modèle*, c’est-à-dire un modèle dans laquelle elle est fausse. Ainsi peut-on dire que les *preuves* s’opposent aux *contre-modèles*, conception un peu curieuse qui oblige le logicien à constamment faire le grand écart entre le monde de la SYNTAXE et celui de la SEMANTIQUE.

*Ce document est un document de travail en prélude... à PRELUDE, il vise à exposer surtout de manière intuitive les principales notions de la ludique afin de les utiliser ensuite dans des applications concernant la pragmatique et en particulier l’étude du dialogue. Il reprend les exposés qui ont eu lieu au cours du séminaire *vers une pragmatique théorique* qui s’est déroulé les 22 et 23 juin 2006 à Grenoble, avec le soutien du Conseil Scientique de l’Université Pierre Mendès France.

Girard, depuis au moins son article *On the meaning of logical rules* ([5]), tente d'abolir cette conception *dualiste* pour la remplacer par une conception *moniste* au terme de laquelle les preuves ne s'opposent plus à des contre-modèles mais à des *contre-preuves* (ou, si on veut, à des *réfutations*), autrement dit des objets de même nature. Une telle entreprise ressemble beaucoup à la *Théorie des Jeux* puisque cette dernière est justement basée sur la confrontation de deux joueurs (un *proposant* et un *opposant*), l'un qui propose une formule et la défend face aux attaques de l'autre jusqu'à ce que l'un des deux n'ait plus de coup à jouer (en ce cas, il est le perdant). La *sémantique - théorie des jeux* a déjà été mise à contribution pour la logique linéaire, notamment par A. Blass ([2]), et on sait que les connecteurs de la LL s'interprètent bien de cette façon. Il manque néanmoins à la sémantique des jeux une des caractéristiques essentielles recherchées dans la ludique, à savoir le caractère *dynamique*. Il ne s'agit en effet pas seulement de décrire une conception où deux joueurs se font face, avec des règles bien définies gouvernant leurs échanges, ce qui constitue une description statique, encore faut-il aussi montrer en quoi et comment les stratégies interagissent. L'originalité de la ludique sera en effet de définir des objets uniquement à partir de leurs comportements les uns vis-à-vis des autres, grâce à une notion particulière d'orthogonalité : deux objets seront orthogonaux quand ils entreront dans un processus de normalisation qui converge. Il s'agit ici de faire entrer de plein pied dans la théorie son aspect dynamique. Dans les présentations standard de la logique (calcul des séquents ou bien réseaux de preuves), cet aspect dynamique est incarné par le processus d'élimination des coupures. Même si, en ludique, la coupure n'est pas exprimée par une règle explicite, elle est, comme nous le verrons, omniprésente : il s'agira de la coprésence de deux objets en un même lieu. Son élimination représentera donc le caractère dynamique du système.

D'autre part, les approches "sémantique des jeux" n'ont pas tout le radicalisme de la démarche de Girard, en ce qu'elles se proposent simplement comme une autre sorte de sémantique par rapport à la sémantique dénotationnelle classique, alors que, pour Girard, une sémantique séparée de la syntaxe n'a pas lieu d'être. La signification des règles de la logique est *dans* les règles de la logique elles-mêmes, par exemple dans leurs symétries. Dans *On the meaning etc.*, Girard dit :

> *My thesis is that the meaning of logical rules is to be found in the well-hidden geometrical structure of the rules themselves*

Il donne comme illustration la négation, qui ne saurait être interprétée par "NO" (par une simple inversion des valeurs de vérité) mais par l'échange des positions entre *proposant* et *opposant*.

La position défendue par Girard peut ainsi être dite *immanentiste* par opposition à la conception tarskienne qui conduit à une perpétuelle fuite en avant dans les niveaux *méta* dès qu'il s'agit de fonder la notion de vérité comme étant aux racines mêmes de la séman-

tique, conception que l'on peut qualifier alors de *transcendantale* (il faut croire en la vérité aux niveaux *méta* pour fonder la sémantique d'une formule).
Avec cette perspective, le logicien peut envisager de vivre dans un univers homogène (plus la peine de faire le grand écart !). Le germe de cette conception est à entrevoir chez Heyting et sa sémantique des preuves, qui peut donner lieu aux observations suivantes, à propos de la notion de *test* (ou *épreuve*).

1. comment tester (A$\wedge$B) ? en testant A ou en testant B,
2. comment tester (A$\vee$B) ? en testant A et en testant B
3. comment tester (A $\Rightarrow$ B) ? en admettant A et en testant B

La notion de test ressemble ainsi beaucoup à celle de négation (cf. règles de De Morgan), et on est conduit à l'analogie : *test pour A = preuve de* $\neg$*A*. Mais évidemment, si A est prouvable, une telle preuve ne peut pas exister ! on ne peut pas avoir à la fois une preuve de A et une preuve de $\neg$A. Un test pour A est donc ce que Girard appelle une *para-preuve*. D'où le fait que désormais, des parapreuves vont s'opposer à d'autres parapreuves, certaines seulement d'entre elles devenant d'authentiques preuves (on ne sait évidemment pas lesquelles avant de commencer !).
Le point de vue intuitionniste n'est pas le meilleur point de vue pour développer ces idées puisque la négation n'y est pas involutive (le fait que $\neg$A ne passerait pas le test n'entraînerait pas la validité de A). Girard dit que ce n'est pas parce que l'intuitionnisme définirait une *mauvaise négation*, mais à cause de ses limitations géométriques : puisque le seul sens correct de la négation est l'échange, cela requiert que les deux côtés d'un séquent soient symétriques. D'un autre côté, le point de vue classique est embarrassant à cause de son caractère non constructif : il y a plusieurs formules en partie droite d'un séquent et on est laissé dans l'indétermination concernant celle qu'il faut choisir pour continuer la preuve (vers le "haut"). D'où l'idée de "symétriser" le point de vue intuitionniste. D'où la *logique linéaire*.

1.2 Considérations méthodologiques

L'idée de Girard peut aussi être vue comme une tentative de s'abstraire au maximum de la syntaxe (en particulier d'évacuer tout le côté "bureaucratique" de la gestion des symboles), tout en concrétisant la sémantique de manière à se retrouver dans un entre-deux où il ne reste qu'un objet géométrique, lequel est un jeu. On va retrouver alors une notion de complétude, mais qui n'est plus la même que la complétude tarskienne. Elle s'énonce ainsi :

> *si σ est une stratégie gagnante pour le jeu $|A|$, alors il existe une preuve π de A telle que σ=$|\pi|$*

où $|A|$ est le jeu qui interprète la formule A et $|\pi|$ la stratégie qui interprète la preuve π.
Ceci rappelle évidemment les efforts déjà faits au XXème siècle pour fonder la logique sur une théorie des jeux, en l'occurrence les efforts faits par Lorenz et Lorenzen ([11], [12]).
Pour Girard, ces tentatives sont *ad hoc* : elles sont parties de la logique existante et ont tenté de trouver les bonnes règles du jeu pour établir la bonne correspondance entre formules pour lesquelles il existe une stratégie gagnante et formules prouvables. Girard, quant à lui, essaie de trouver une notion de jeu qui soit simple, naturelle et "géométrique" (notamment en ce qu'elle intègre la notion dynamique d'élimination des coupures, comme on l'a vu plus haut), et ensuite seulement de voir quel type de logique on obtient. Les preuves donneront alors des stratégies gagnantes, mais qu'en sera-t-il des stratégies non gagnantes ? Eh bien, elles donneront des *parapreuves* c'est-à-dire des *fausses* preuves (!). Mais si on peut construire des fausses preuves... c'est forcément qu'on s'autorise à faire des entorses à la logique, autrement dit qu'on accepte des *paralogismes* !
Evidemment, on ne va pas accepter n'importe quoi comme paralogisme... on va en accepter le moins possible, mais suffisamment quand même pour avoir assez de parapreuves. De plus, nos paralogismes devront être tels que l'élimination de la coupure existe toujours.
Le principal paralogisme que Girard propose est de considérer tout séquent $\vdash \Gamma$ comme un axiome. C'est ce qui se passe lorsque nous essayons de faire une preuve en calcul des séquents : à partir d'un certain moment, à la suite de nombreuses décompositions, on arrive à un séquent dont on voit bien que nous ne pourrons pas le prouver... alors on abandonne. mais l'objet que l'on vient d'obtenir est bel et bien une parapreuve : il se distingue par l'application de l'axiome en question, qui se traduit par "j'abandonne". Cette règle sera appelée règle du *daimon*.
Il y a d'autres paralogismes qu'on serait tenter de faire. Soit par exemple un joueur I (Girard, p. 13) qui essaie de prouver $\vdash ?A \otimes ?B$. Bien sûr, ce séquent n'est pas valide de manière isolée, mais il se pourrait que pour certaines A ou B particulières, il le soit. Alors son contradicteur essaierait de prouver $\vdash !A^{\perp} \wp !B^{\perp}$, ce qui revient à prouver $\vdash !A^{\perp}, !B^{\perp}$ qui n'est bien sûr pas prouvable en logique linéaire standard. Si le joueur II n'a que la règle du $daimon$ à opposer... alors le joueur I gagne facilement, trop facilement peut-être car l'abandon immédiat de II empêche que l'on entre à l'intérieur de la formule $\vdash ?A \otimes ?B$ (comprendre dans le cas présent pourquoi elle est valide). Alors peut-être a-t-on intérêt à ajouter d'autres paralogismes... Par exemple, si on veut décomposer la formule, on pourra faire une entorse aux limitations structurelles et utiliser l'affaiblissement. En ce cas le joueur II jouerait $\vdash !A^{\perp}$ ou bien $\vdash !B^{\perp}$. Autre solution : il pourrait recourir à la règle Mix[1]

[1]La règle structurelle MIX est la règle suivante :

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta \quad \Pi \vdash \Lambda}{\Gamma, \Pi \vdash \Delta, \Lambda} Mix$$

et chercher à prouver les deux séquents $\vdash !A^\perp$ **et** $\vdash !B^\perp$. Une autre façon de sortir de ce dilemme est de choisir la logique *affine* plutôt que la logique linéaire, puisqu'en ce cas la règle d'affaiblissement serait acceptée et que l'on pourrait alors se contenter du seul paralogisme qui se traduit par "j'abandonne".
On voit qu'à ce stade, "la" logique n'est pas (encore) déterminée. En procédant de la sorte, peut-être tomberons-nous sur une logique connue (intuitionniste ? classique ? linéaire ?), mais ce n'est pas sûr. Même si Girard penche naturellement vers la logique linéaire, il n'exclut pas qu'il faille plutôt choisir la logique affine ni même que plusieurs logiques soient admissibles.
Si la complétude doit pouvoir être prouvable sans trop d'effort, il n'en va pas nécessairement de même pour la correction (*soundness*), laquelle est évidemment toujours requise. Elle s'exprime de la manière suivante :

> *si π est une parapreuve de A, alors $|\pi|$ est une stratégie pour le jeu $|A|$; de plus si π est une preuve, c'est-à-dire n'utilise aucun paralogisme, alors $|\pi|$ est gagnante.*

mais comment construire une stratégie à partir d'une preuve ? et qui plus est, une stratégie gagnante ? Girard procède alors à l'analyse des preuves (ce qu'il appelle aussi - clin d'oeil à Derrida ? - leur "déconstruction"). Si on veut interpréter une preuve comme une stratégie dans un jeu à deux joueurs, alors nécessairement doit apparaître quelque part une notion de *polarité*, celle qui existe entre les deux joueurs. Or, il se trouve que J. M. Andréoli avait déjà rencontré une telle notion dans ses travaux sur la recherche de preuves en logique linéaire.

1.3 Questions de polarité

Andréoli ([1]) a développé dans les années 90 une approche informatique selon laquelle "*Computation = Proof search*", basée sur la logique linéaire (ce qui a conduit au langage `LinLog`). Ce faisant, il s'est heurté au problème qu'en cherchant des preuves, on en trouve beaucoup trop, puisqu'il y a dans tous les cas, de nombreuses démonstrations d'une même formule qui ne diffèrent que par l'ordre d'application de certaines règles. Toutes ces démonstrations sont dites équivalentes. La recherche de preuve devient beaucoup plus faisable (*tractable*) si on se contente seulement de chercher les démonstrations d'un certain type tel qu'on soit sûr que chaque classe renferme au moins une démonstration de ce type. Ces démonstrations sont dites *avec focus* (*focusing proofs*). L'idée essentielle de cette recherche de preuves est la suivante. Les règles d'inférence conduisent à de multiples

Elle n'est pas acceptée en logique linéaire classique alors qu'elle est satisfaite dans de nombreux modèles de la logique linéaire comme par exemple les espaces cohérents cas de permutations. Par exemple, nous pouvons regarder le début de la preuve suivante :

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\vdots}{\vdash \Gamma, F, H, K}}{\vdash \Gamma, F, H \wp K} \qquad \cfrac{\vdots}{\vdash \Delta, G}}{\vdash \Gamma, \Delta, F \otimes G, H \wp K}$$

Il est obtenu en rendant d'abord active une formule tensorielle, puis en choisissant une formule en $\wp$. Le début de preuve suivant fait les choix inverses :

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\vdots}{\vdash \Gamma, F, H, K} \qquad \cfrac{\vdots}{\vdash \Delta, G}}{\vdash \Gamma, \Delta, F \otimes G, H, K}}{\vdash \Gamma, \Delta, F \otimes G, H \wp K}$$

En fait, les connecteurs de la logique linéaire peuvent être répartis en deux groupes qui se comportent de manière différente eu égard à la formule principale (celle qui est choisie à chaque pas).

- les connecteurs asynchrones (ou négatifs) :
  - les multiplicatifs $\perp$, $\wp$ et ?
  - les additifs : T, $\&$, $\forall$
- les connecteurs synchrones (ou positifs) :
  - les multiplicatifs : 1, $\otimes$ et !
  - les additifs : 0, $\oplus$, $\exists$

Les connecteurs asynchrones sont déterministes et réversibles. En effet, quand on applique la règle [$\wp$] ou la règle [$\&$], il n'y a qu'une seule manière de faire, et conséquemment on peut toujours revenir en arrière : aucune information n'est perdue au cours de l'application de la règle. Quand on applique en revanche la règle [$\oplus$] ou la règle [$\otimes$], il y a plusieurs manières de continuer la preuve (toujours en voyant les choses du bas vers le haut). Dans le cas de $A \oplus B$, il faut choisir si on va continuer sur A ou si on va continuer sur B, dans le cas de la règle [$\otimes$], le découpage du contexte n'est pas déterministe. Ceci entraîne qu'il sera difficile de revenir en arrière une fois le choix effectué : dans le premier cas par exemple on aura "oublié " B si on a choisi A. Dans le deuxième cas, si on "inverse" la règle, de manière à ce que la conclusion devienne prémisse et les prémisses conclusions, alors on obtient évidemment une règle fausse puisque n'importe quelle partition du contexte ne

convient pas aux conclusions recherchées.
D'où l'idée selon laquelle une recherche de preuve efficace doit sélectionner à chaque pas la formule principale de manière à ce que :

- si le séquent contient des formules asynchrones (négatives), alors n'importe laquelle peut être choisie (au hasard), et on continuera de cette manière tant qu'il y aura des formules asynchrones dans le séquent à prouver (phase entièrement déterministe de la preuve),
- quand toutes les formules asynchrones ont été décomposées, une formule principale doit être sélectionnée de manière non déterministe, mais dès qu'elle a été sélectionnée, on doit *focaliser* sur elle de manière à ne sélectionner dans la suite que des sous-formules de cette formule tant que cette sous-formule est synchrone.

Il apparaît ainsi qu'on peut très bien présenter une preuve sous la forme d'une alternance de suites de pas : une suite de pas négatifs, suivie d'une suite de pas positifs, suivie d'une suite de pas négatifs et ainsi de suite. Mieux même : on peut considérer qu'une suite de pas de même signe correspond à un seul pas du signe en question, consistant à appliquer une règle associée à un *connecteur synthétique*. Une logique qui s'affranchira ainsi de la gestion bureaucratique des symboles pourra consister en deux règles globales : l'une pour régir les connecteurs positifs et l'autre les connecteurs négatifs. C'est bien ce que va faire la ludique.
Avec de tels connecteurs synthétiques, et pour une preuve qui consiste en une succession de pas de signes alternés, la méthode de focalisation préserve comme invariant le fait qu'un séquent contienne au plus une formule négative (on a regroupé dans une même formule tous les connecteurs négatifs). Si la formule active est positive, alors toutes les autres formules du séquent sont positives (sinon la formule négative aurait été choisie comme formule active) et toutes les prémisses dans l'application de la règle ont exactement une formule négative. Si la formule active est négative, alors toutes les autres formules du séquent sont positives et chaque prémisse de la règle est un séquent consistant seulement en des formules positives. Au départ, on veut prouver un séquent qui consiste en une simple formule, ce qui est conforme à l'invariant.
Exemple(cf. P. L. Curien [3]) :
Soit la formule : $((N_1 \otimes N_2)\&Q)\wp R$ où Q, R sont supposées être positives, $P = N_1 \otimes N_2$ est positive et N_1, N_2 sont négatives. $(P\&Q)\wp R$ est négative. La règle pour le connecteur synthétique négatif (qui est une synthèse de $\&$ et $\wp$) est :

$$\frac{\vdash P, R, \Lambda \qquad \vdash Q, R, \Lambda}{\vdash (P\&Q)\wp R, \Lambda}$$

C'est une règle ternaire qui associe $(P\&Q)\wp R$ à P, Q et R (prémisses positives)
Une preuve focalisée de $((N_1 \otimes N_2)\&Q)\wp R$ se termine comme suit :

$$\cfrac{\cfrac{\vdash N_1, R, \Lambda_1 \qquad \vdash N_2, \Lambda_2}{\vdash (N_1 \otimes N_2), R, \Lambda} \qquad \vdash Q, R, \Lambda}{\vdash ((N_1 \otimes N_2)\&Q)\wp R, \Lambda}$$

où on peut voir l'alternance des coups : d'abord une règle négative, puis une règle positive (ici consistant dans la règle bien connue du tenseur). On peut présenter le même preuve de la manière suivante :

$$\cfrac{\cfrac{N_1^\perp \vdash R, \Lambda_1 \qquad N_2^\perp \vdash \Lambda_2}{\vdash (N_1 \otimes N_2), R, \Lambda} \qquad \vdash Q, R, \Lambda}{((N_1 \otimes N_2)^\perp \oplus Q^\perp) \otimes R^\perp \vdash \Lambda}$$

Dans cette présentation, il n'y a que des connecteurs positifs. De plus, il y a au plus une formule à gauche de $\vdash$.
Toutes ces observations conduisent à simplifier la présentation du calcul : on ne considérera que des séquents avec seulement des formules positives et au plus une formule en partie gauche. Nous n'avons alors que des règles positives, mais pour chaque connecteur synthétique : une règle d'introduction à gauche, qui est réversible, et un ensemble de règles d'introduction à droite qui sont irréversibles, par exemple pour le connecteur synthétique ci-dessus, qui peut s'écrire $(P^\perp \oplus Q^\perp) \otimes R^\perp$:

$$\frac{\vdash P, R, \Lambda \qquad \vdash Q, R, \Lambda}{(P^\perp \oplus Q^\perp) \otimes R^\perp \vdash \Lambda}\{\{P, R\}, \{Q, R\}\} \qquad \frac{P \vdash \Gamma \qquad R \vdash \Delta}{\vdash (P^\perp \oplus Q^\perp) \otimes R^\perp, \Gamma, \Delta}\{P, R\}$$

$$\frac{Q \vdash \Gamma \qquad R \vdash \Delta}{\vdash (P^\perp \oplus Q^\perp) \otimes R^\perp, \Gamma, \Delta}\{Q, R\}$$

la règle en haut à droite vient de la démonstration suivante :

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{P \vdash \Gamma}{\vdash P^\perp, \Gamma}}{\vdash P^\perp \oplus Q^\perp \Gamma} \qquad \cfrac{R \vdash \Delta}{\vdash R^\perp \Delta}}{\vdash (P^\perp \oplus Q^\perp) \otimes R^\perp, \Gamma, \Delta}$$

idem pour les autres. On peut noter (cf. Curien, p.17) que le connecteur isomorphe $(P^{\perp} \otimes Q^{\perp}) \oplus (P^{\perp} \otimes R^{\perp})$ possède exactement les mêmes règles.
Pour prouver le théorème de focalisation, Andréoli a construit un calcul des séquents (*tryadique*) tel que toute démonstration dans ce calcul corresponde exactement à une preuve focalisée du calcul des séquents ordinaire. Pour cela, il utilise des séquents avec un *bénitier* (l'expression est de Girard). Le *bénitier* contient au plus une formule et elle est positive. Cela correspond au cas où dans la recherche d'une formule active, on en rencontre une qui est positive : alors à ce moment-là, on focalise sur elle et les règles suivantes ne s'appliquent qu'au contenu du bénitier, produisant de nouvelles formules positives à décomposer jusqu'à ce qu'on trouve une formule négative, auquel cas on remet cette dernière dans le pot commun, de manière à entamer une suite de coups négatifs. La réintégration d'une formule dans le pot commun représente un *shift* c'est-à-dire un pas où on change de polarité dans la démonstration. La formule qui passe du côté des négatifs était jusque là du côté des positifs, donc vue comme positive. Cela sous-entend qu'une formule peut changer de polarité. Pour faciliter le calcul, on considère en effet que tout connecteur d'un signe donné connecte des formules de ce même signe. Par exemple, si on a un tenseur entre formules négatives, on va disposer d'un opérateur de changement de signe qui va rendre (temporairement !) positives les formules négatives. Si N est négative, $\downarrow N$ est positive, et la règle de changement de signe qui la concerne est la règle :

$$\frac{\vdash \Delta, N;}{\vdash \Delta; \downarrow N}\,[\downarrow]$$

D'une manière similaire, le processus de focalisation, c'est-à-dire le processus selon lequel, en décomposant une formule négative, on trouve une formule positive sur laquelle on focalise par la suite, peut se décrire au moyen de deux règles. D'une part, une autre règle de changement de signe qui fait que la formule sur laquelle on va se focaliser, jusqu'ici du côté des négatives, donc négative elle-même, retourne à sa positivité, et d'autre part la règle de focalisation proprement dite, qui fait passer toute formule positive dans le *bénitier*. Ces deux règles sont respectivement :

$$\frac{\vdash \Delta, P;}{\vdash \Delta, \uparrow P;}\,[\uparrow] \qquad\qquad \frac{\vdash \Delta; P}{\vdash \Delta, P;}\,[focus]$$

Dans la règle de focalisation, les seuls éléments négatifs de Δ sont impérativement des atomes (sinon, il y aurait encore une formule négative à décomposer). Les autres règles de ce système sont alors :

AXIOME

$$\frac{}{\vdash P^{\perp}; P}$$

REGLES POSITIVES

$$\frac{\vdash \Gamma; P}{\vdash \Gamma; P \oplus Q} \qquad \frac{\vdash \Gamma; Q}{\vdash \Gamma; P \oplus Q} \qquad \frac{\vdash \Gamma_1; P \qquad \vdash \Gamma_2; Q}{\vdash \Gamma_1, \Gamma_2; P \otimes Q}$$

REGLES NEGATIVES

$$\frac{\vdash N_1, N_2, \Gamma;}{\vdash N_1 \wp N_2, \Gamma;} \qquad \frac{\vdash N_1, \Gamma; \qquad \vdash N_2, \Gamma;}{\vdash N_1 \& N_2, \Gamma;}$$

Ceci nous a permis d'introduire les opérateurs de changement de polarité $\uparrow$ et $\downarrow$, qui joueront un rôle dans la suite.

2 Les dessins

2.1 Des arbres de preuve pouvant être infinis

Si maintenant on devait écrire des règles pour tous les connecteurs synthétiques que l'on peut construire, il en faudrait une infinité. Résultat : on va se contenter de schémas de règles. Et comme on ne peut pas non plus prévoir dans un tel schéma ce que seront les formules particulières utilisées, on va se contenter de leurs lieux (*loci*), c'est-à-dire de l'endroit où elles sont inscrites. Par certains côtés, cela ressemble à un retour aux sources de la logique moderne, à l'époque où des logiciens polonais (par exemple Leşniewski) ramenaient les objets de la logique à de pures instances graphiques. Telle formule écrite en tel lieu n'était pas la même que la formule *équiforme* écrite en un autre lieu. La relation d'équiformité avait un rôle central, comme en aura, en ludique, le *fax* que nous verrons plus loin (le *fax* n'étant que la forme moderne de l'équiforme).
A titre d'exemple, reprenons les trois règles que nous avons réussi à dégager plus haut, à propos du connecteur synthétique $(P^\perp \oplus Q^\perp) \otimes R^\perp$, et que nous rappelons ici :

$$\frac{\vdash P, R, \Lambda \qquad \vdash Q, R, \Lambda}{(P^\perp \oplus Q^\perp) \otimes R^\perp \vdash \Lambda} \{\{P, R\}, \{Q, R\}\} \qquad \frac{P \vdash \Gamma \qquad R \vdash \Delta}{\vdash (P^\perp \oplus Q^\perp) \otimes R^\perp, \Gamma, \Delta} \{P, R\}$$

$$\frac{Q \vdash \Gamma \qquad R \vdash \Delta}{\vdash (P^\perp \oplus Q^\perp) \otimes R^\perp, \Gamma, \Delta} \{Q, R\}$$

Admettons que les formules atomiques soient rangées à différentes adresses, celles-ci étant des mots sur $\mathbb{N}$ (l'ensemble des entiers naturels), et que $P^\perp, Q^\perp, R^\perp$ soient aux adresses

respectives 1, 2, 3. ξ est une variable d'adresse. $\xi \star I$ dénote l'ensemble $\{\xi i; i \in I\}$ et ξi est souvent notée $\xi \star i$. Alors si la formule $(P^\perp \oplus Q^\perp) \otimes R^\perp$ est supposée logée à l'adresse ξ, les formules atomiques P, Q, R qui figurent dans les prémisses seront supposée logées aux adresses respectives $\xi 1$, $\xi 2$ et $\xi 3$. $1, 2$ et 3 apparaissent ainsi comme des adresses *relatives*. Les séquents sont normalisés, au sens où on les écrit tous sous la forme de ce que Girard appelle une *fourche*, avec au plus une adresse en partie gauche. Les deux types de séquents sont donc : $\xi \vdash \Lambda$ et $\vdash \Lambda$. Les preuves de séquents du premier (resp. deuxième) type sont dites avoir une *base* négative (resp. positive).
Ainsi, la première règle en haut à gauche est une règle (de base) négative (le connecteur positif est introduit en partie gauche du séquent), alors que les deux autres sont des règles positives (connecteur positif introduit à droite du séquent). Une règle négative apparaît ainsi comme une règle avec plusieurs séquents comme prémisses, chacun d'eux contenant plusieurs adresses en partie droite (et rien en partie gauche), ces séquents sont donc de la forme $\vdash \xi \star J, \Lambda_J$. Une règle positive apparaît de son côté comme une règle avec plusieurs prémisses, chacune ayant une adresse en partie gauche. Ses prémisses sont donc de la forme $\xi \star i \vdash \Lambda_i$.
Les trois règles ci-dessus deviennent donc :

$$\frac{\vdash \xi_1, \xi_3, \Lambda \qquad \vdash \xi_2, \xi_3, \Lambda}{\xi \vdash \Lambda}\,(-, \xi\{\{1,3\},\{2,3\}\}) \qquad \frac{\xi_1 \vdash \Gamma \qquad \xi_3 \vdash \Delta}{\vdash \xi, \Gamma, \Delta}\,(+, \xi, \{1,3\})$$

$$\frac{\xi_2 \vdash \Gamma \qquad \xi_3 \vdash \Delta}{\vdash \xi, \Gamma, \Delta}\,(+, \xi, \{2,3\})$$

Et le schéma général des règles est le suivant :

REGLE POSITIVE

$$\frac{\ldots \quad \xi \star i \vdash \Lambda_i \quad \ldots}{\vdash \xi, \Lambda}\,(+, \xi, I)$$

REGLE NEGATIVE

$$\frac{\ldots \quad \vdash \xi \star J, \Lambda_J \quad \ldots}{\xi \vdash \Lambda}\,(-, \xi, \mathcal{N})$$

où I et J sont des parties finies de $\mathbb{N}$, $i \in I$, les Λ_i sont deux à deux disjoints, $\mathcal{N}$ est un ensemble (*possiblement infini*) de parties finies de $\mathbb{N}$, chaque J de la règle négative étant un élément de cet ensemble, tous les Λ_J sont inclus dans Λ, et de plus chaque séquent de

base est bien formé, au sens où toutes les adresses sont deux à deux disjointes.
A cela, on ajoute le *daimon* :

$$\dfrac{}{\vdash \Lambda}\,\dagger$$

Ces règles ne portant plus mention de formules particulières, on peut dire qu'elles sont *non typées*. De ce point de vue, on comprend que ce système puisse être comparé au λ-calcul non typé.
Les preuves qui sont conduites dans ce système sont appelées des *dessins* (!). Un dessin est donc une alternance de règles négatives et positives, avec éventuellement un *daimon* pour cloturer (mais on peut très bien envisager qu'un dessin soit infini). En fait, il y a une infinité dans les deux dimensions : en largeur comme en hauteur. En largeur aussi parce que la règle négative admet le cas où il y aurait une infinité de J (branchement infini).
La forme générale d'un dessin est la suivante :

$$\dfrac{\dots \qquad \dfrac{\dfrac{\dots \quad \dfrac{\dots}{\vdash \xi_{k_{1_1}} \star J_2, \Lambda_{J_m}} \quad \dots}{\xi_{k_{1_1}} \vdash \Lambda_{i_1}}\,(-,\xi_{k_{1_1}},\mathcal{N}_2) \qquad \dfrac{\dots}{\xi_{k_{1_2}} \vdash \Lambda_{i_2}} \quad \dots \quad \dfrac{\dots}{\xi_{k_{1_j}} \vdash \Lambda_{i_j}}}{\vdash \Lambda_{I_k}, \xi_{k_1}, \xi_{k_2}, \dots, \xi_{k_{n_k}}}\,(+,\xi_{k_1},J_1) \qquad \dots}{\xi \vdash \Lambda}\,(-,\xi,\mathcal{N})$$

Au premier pas (à partir du bas), on suppose que $\mathcal{N} = \{I_1, \dots, I_{N_1}\}$. On a représenté comme prémisse uniquement le séquent positif associé à k, c'est-à-dire relatif au choix de I_k dans $\mathcal{N}$, qui, lui-même, contient les éléments $k_1, k_2, \dots, k_{n_k}$. Au deuxième pas, on a une règle positive pour chaque séquent prémisse du pas précédent, choisie par exemple en prenant pour foyer le premier ξ_{k_l}, c'est-à-dire ξ_{k_1}, ce qui donne pour chacun une suite de prémisse négatives indexées par un ensemble J_1 qui, lui-même, contient les éléments $1, 2, \dots, j$. Les Λ_{i_p} du numérateur ont absorbé les ξ_{k_l} qui n'ont pas encore servi de foyer (mais leur tour viendra !). Puis ensuite, on continue en alternant les pas, positifs et négatifs.
La règle **positive** peut s'interpréter comme :

- dans une situation locale ξ, je propose un ensemble de questions I,
- je pose la question i, figurant dans I, pour tout $i \in I$

et la règle **négative** comme :

- face à une question localisée dans ξ, je me prépare à un répertoire de réponses possibles $\mathcal{N}$ de la part de mon interlocuteur,
- l'interlocuteur répond en choisissant un des I dans $\mathcal{N}$

P.L. Curien (p. 23) fait remarquer que *les adresses qui apparaissent dans un dessin basé sur* $\vdash \Lambda$ *(resp. sur* $\zeta \vdash \Lambda$*) sont des extensions* $\xi\xi'$ *d'adresses* ξ *figurant dans* Λ *(resp.*

$\{\zeta\} \cup \Lambda$*), de sorte que toutes les adresses, à droite de* $\vdash$*, à chaque étage d'un dessin, ont la même parité, les formules de gauche ayant la parité opposée.*
Comme annoncé plus haut, le *fax* remplace la règle d'identité des systèmes usuels, en ce qu'il permet d'établir une correspondance entre des formules "identiques" se trouvant à des adresses différentes (donc pas si identiques que ça, mais au moins équiformes). On en donne une définition récursive :

$$Fax_{\xi,\xi'} = \cfrac{\cfrac{... \quad Fax_{\xi i1,\xi'_{i1}} \quad ...}{... \quad \vdash \xi \star J_1, \xi' \quad ...}\,(+,\xi',J_1)}{\xi \vdash \xi'}\,(-,\xi,\mathcal{P}_f(\mathbb{N}))$$

Autrement dit : ξ' correspond bien à ξ par Fax si et seulement si en appliquant la première règle négative (puisque la base du Fax est négative), on décompose la formule logée en ξ en des embranchements tels que pour chacun d'eux, une règle positive s'applique au terme de laquelle chaque résultat de la décomposition de ξ correspond par Fax à un résultat de la décomposition de ξ'.

2.2 Les dessins vus comme des stratégies

Il n'échappe à personne qu'un système où on trouve des règles positives et négatives et où chaque preuve est une alternance de pas positifs et négatifs ressemble beaucoup à ce qui se produit au cours d'un dialogue. Les pas positifs sont les "coups" de l'un des participants (ou joueurs) et les négatifs ceux de l'autre participant. Les approches plus traditionnelles en sémantique des jeux (comme celle de Hintikka) ou en logique dialogique (comme celles de Lorenzen, Lorenz, Fleisher ou Rahman [15]) ont déjà établi une dichotomie entre connecteurs, en logique classique (ou intuitionniste). Ceux-ci se répartissent en effet en deux classes :

– les actifs : ceux pour lesquels la règle associée, dans les dialogues, consiste en un choix actif opéré par le proposant ($\vee$, $\exists$)
– les passifs : ceux pour lesquels la règle associée consiste en un choix passif, c'est-à-dire un choix qui est fait par l'autre participant, auquel le joueur dont c'est le tour de jouer doit être prêt à répondre ($\wedge$, $\forall$)

On retrouve cette même dichotomie en ce qui concerne la logique linéaire : les actifs sont les positifs et les passifs sont les négatifs.
Nous avons vu que dans un dessin, il y a alternance d'application de règles positives et négatives. Lors d'un pas négatif, la preuve étale une famille de sous-ensembles de $\mathbb{N}$, $\mathcal{N}$, le pas positif suivant consistant à sélectionner un $J \in \mathcal{N}$. Du point de vue dialogique dans lequel nous nous plaçons désormais, les coups positifs correspondent aux coups joués par le proposant et les négatifs à ceux qui sont joués par l'opposant. L'opposant ne "choisit"

pas $\mathcal{N}$ (c'est plutôt le proposant qui possède une sorte de répertoire de sous-ensembles à sa disposition), mais un $J \in \mathcal{N}$ (ou éventuellement, quand il n'y a pas "consensus", un $J \notin \mathcal{N}$).
Finalement, pour un pas positif, le proposant choisit une adresse ξ et un ensemble I (il "énumère" les cas qui le concernent), comme dans le cas de l'application d'une règle positive. Pour un pas négatif, ce n'est pas lui qui choisit l'adresse, mais son partenaire, et lui, il se prépare aux réponses de ce dernier. Celui-ci peut de plus choisir un J qui n'appartient pas à $\mathcal{N}$: en ce cas, le joueur proposant n'a pas prévu la réaction de son partenaire (il n' a pas choisi un $\mathcal{N}$ assez grand).
Un *dessin* est alors vu comme une *stratégie*, et on l'appelle alors... un *dessein*(!), chaque joueur possède une fonction qui, à tout coup joué par son partenaire, associe un coup que lui-même peut jouer.
Nous allons reprendre ici l'exemple qu'avait donné Myriam Quatrini lors de notre première rencontre à Grenoble, en juin 2006.
Une personne X souhaite savoir si une personne Y dont elle a entendu dire qu'elle souhaite vendre des biens immobiliers, va vendre un bien noté 1. X sait que Y possède trois biens : 1, 2 et 3. X désire savoir :

1. *si Y va vendre 1*
2. *au cas où Y vendrait 1, à quel prix ?*

La "stratégie" de X consiste à démarrer l'échange avec la question :
0 = quels biens immobiliers as-tu l'intention de vendre ? Cela se représente par un coup positif, à partir d'une adresse vide, ici notée $< >$.

$$\frac{0 \vdash}{\vdash <>}$$

à partir de là, il faut que X prévoie toutes les réponses possibles de Y (donc l'ensemble des parties de $\{1, 2, 3\}$) :

$$\frac{\vdash 01 \quad \vdash 01, 02 \quad \vdash 01, 03 \quad \vdash 01, 02, 03 \quad \vdash 02 \quad \vdash 02, 03 \quad \vdash 03}{0 \vdash}$$

Il prévoit ensuite que pour certaines réponses de Y, il n'ira pas plus loin, car elles ne l'intéressent pas, d'où :

$$\frac{\vdash 01 \quad \vdash 01, 02 \quad \vdash 01, 03 \quad \vdash 01, 02, 03 \quad \frac{}{\vdash 02}\dagger \quad \frac{}{\vdash 02, 03}\dagger \quad \frac{}{\vdash 03}\dagger}{0 \vdash}$$

Dans les cas où le bien 1 est à vendre, X doit prévoir de demander le prix. Par exemple si 1 est le seul bien à vendre, il a prévu de poser la question : *1 = à quel prix ?*. D'où :

$$\frac{011 \vdash}{\vdash 01}$$

(dans la partie gauche du séquent figure une représentation de l'historique de la partie : il a posé la question 0 et a obtenu la réponse 1, maintenant il pose la question 1). X doit être prêt à recevoir n'importe quel prix i, autrement dit i est une valeur entière quelconque :

$$\cfrac{\cfrac{\vdash 011i}{011 \vdash}}{\vdash 01}$$

et quand il a obtenu une valeur de i, il met fin au dialogue, d'où :

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{\vdash 011i}\,\dagger}{011 \vdash}}{\vdash 01}$$

Comme cela est le cas pour chaque branche, sa stratégie, ou son dessein, peut se représenter par :

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{\vdash 011i}\,\dagger}{011 \vdash}}{\vdash 01} \quad \cfrac{\cfrac{\cfrac{}{\vdash 011i, 02}\,\dagger}{011 \vdash 02}}{\vdash 01, 02} \quad \cfrac{\cfrac{\cfrac{}{\vdash 011i, 03}\,\dagger}{011 \vdash 03}}{\vdash 01, 03} \quad \cfrac{\cfrac{\cfrac{}{\vdash 011i, 02, 03}\,\dagger}{011 \vdash 02, 03}}{\vdash 01, 02, 03} \quad \cfrac{}{\vdash 02}\,\dagger \quad \cfrac{}{\vdash 02, 03}\,\dagger \quad \cfrac{}{\vdash 03}\,\dagger}{0 \vdash}}{\vdash <>}$$

Evidemment, de son côté, Y a sa propre stratégie, qui consiste d'abord à être prêt à recevoir la question :

$$\frac{\vdash 0}{<> \vdash}$$

C'est bien sûr le mouvement dual par rapport à celui de X :

$$\frac{0 \vdash}{\vdash <>}$$

Ensuite, il répond à la question, par le choix d'une partie de $\{1, 2, 3\}$: c'est l'application pour lui d'une règle positive puisqu'il a le choix.

$$\dfrac{\dfrac{0n \vdash \;\ldots\quad 0m \vdash}{\vdash 0}}{<>\vdash}$$

Au coup d'après, il doit être prêt à recevoir la question 1 et il est alors libre de donner l'entier i, correspondant à un prix quelconque, qu'il veut.
[Remarque : il devrait en théorie être prêt à recevoir n'importe quelle question... et être prêt également à ce que X soit intéressé par n'importe lequel de ses biens, voire n'importe lesquels, ce qui devrait beaucoup compliquer la représentation...] Un dessein de Y peut donc être (entre autres !) le suivant :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{011i \vdash}\,\dagger}{\vdash 011}}{01 \vdash} \qquad 03 \vdash}{\vdash 0}}{<>\vdash}$$

On peut représenter une partie (un dialogue) par une suite d'application de règles. En ce cas, un "coup" dans le dialogue est entièrement déterminé par : un signe, une adresse et une partie de $\mathbb{N}$ (nous y reviendrons plus loin). Par exemple :

$$(+, <>, \{0\}), (-, 0, \{1, 3\}), (+, 01, \{1\}), (-, 011, \{i\})\dagger$$

est une partie (un dialogue) du point de vue de X. Ce dialogue consiste pour X en :

1. premier coup positif : X choisit une question (= un ensemble I, c'est $\{0\}$),
2. deuxième coup : négatif, Y choisit à partir de l'adresse 0, le sous-ensemble $\{1, 3\}$,
3. troisième coup : positif, X choisit, à partir d'une adresse proposée par Y (ici 01), une partie, à savoir $\{1\}$, qui, ici représente la nouvelle question (*quel est ton prix ?*),
4. quatrième coup : négatif, Y, à partir de l'adresse 011, choisit un prix i,
5. le *daimon* met fin au dialogue : X a obtenu les renseignements qu'il voulait.

Une partie peut aussi être :

$(+, <>, \{0\}), (-, 0, \{2, 3\}), \dagger$

Il faut noter que X doit également prévoir un dessein de Y qui consisterait pour ce dernier à aucune intention de vendre. Ce dessein de Y serait représenté par :

$$\frac{\dfrac{}{\vdash 0}\,\dagger}{<>\vdash}$$

Ce genre de dialogue correspond très bien avec les efforts d'un joueur X pour démontrer une formule ϕ, face à un autre joueur Y, qui tente de la réfuter. Dans un contexte donné, X va vouloir prouver $(A \otimes C) \oplus (B \otimes C)$. Alors Y oppose $(A^{\perp} \wp C^{\perp}) \& (B^{\perp} \wp C^{\perp})$. Le dessein de Y est :

$$\frac{\dfrac{\vdash A^{\perp}, C^{\perp}}{\vdash A^{\perp} \wp C^{\perp}} \qquad \dfrac{\vdash B^{\perp}, C^{\perp}}{\vdash B^{\perp} \wp C^{\perp}}}{\vdash (A^{\perp} \wp C^{\perp}) \& (B^{\perp} \wp C^{\perp})}$$

et celui de X peut être l'un des deux suivants :

$$\frac{\dfrac{\vdash A \quad \vdash C}{\vdash A \otimes C}}{\vdash (A \otimes C) \oplus (B \otimes C)} \qquad\qquad \frac{\dfrac{\vdash B \quad \vdash C}{\vdash B \otimes C}}{\vdash (A \otimes C) \oplus (B \otimes C)}$$

Ces deux dess(e)ins peuvent être reliés par coupure à celui de Y. En éliminant la coupure (normalisation), on remonte jusqu'à :

$$\vdash A \quad \vdash A^{\perp}, C^{\perp} \quad \vdash C$$

ou :

$$\vdash B \quad \vdash B^{\perp}, C^{\perp} \quad \vdash C$$

Autrement dit, les deux joueurs doivent se mettre d'accord sur la présence de A et de C ou sur la présence de B et de C. S'ils sont d'accord sur une de ces deux co-présences, X gagne, sinon, X perd. On voit ainsi en quoi se résume un jeu (un dialogue) : quels sont les éléments simples en lesquels il se réduit. Si un autre jeu se présente, qui se laisse réduire de la même façon, alors les deux jeux sont équivalents. C'est justement ce qui se produit avec l'essai de prouver la formule équivalente $(A \oplus B) \otimes C$.
Autre exemple :
Claudia Faggian, dans un exposé fait à l'ENS-Lyon en novembre 2005, reprend un exemple

du à F. Maurel, reposant sur l'idée de contrat.
Soit le contrat suivant : pour un euro, Bob accepte de donner à Alice au choix ou bien un livre ou bien, et dans ce cas c'est lui qui décide, CD ou un DVD de sa collection.
Ce contrat prend donc la forme de la formule de logique linéaire :

$$1 \text{ euro} \multimap (1\text{livre} \mathbin{\&} (1 \text{ CD} \oplus 1 \text{ DVD}))$$

Alice accepte le contrat et a deux stratégies :

- elle paye un euro et choisit le livre ;
- elle paye un euro et elle choisit la surprise CD ou DVD.

Bob propose le contrat et a deux stratégies :

- il se prépare à recevoir un euro et donner un livre ou à recevoir un euro et donner un CD.
- il se prépare à recevoir un euro et donner un livre ou à recevoir un euro et donner un DVD.

Les stratégies d'Alice correspondent aux deux débuts de preuves suivants (en logique linéaire) :

$$\dfrac{\vdash e \qquad \dfrac{\vdash l^\perp}{\vdash l^\perp \oplus (c^\perp \& d^\perp)}}{\vdash e \otimes (l^\perp \oplus (c^\perp \& d^\perp))} \qquad\qquad \dfrac{\vdash e \qquad \dfrac{\dfrac{\vdash c^\perp \quad \vdash d^\perp}{\vdash c^\perp \& d^\perp}}{\vdash l^\perp \oplus (c^\perp \& d^\perp)}}{\vdash e \otimes (l^\perp \oplus (c^\perp \& d^\perp))}$$

qui peuvent être écrites sous forme focalisée :

$$\dfrac{e^\perp \vdash \qquad l \vdash}{\vdash e \otimes (l^\perp \oplus (c^\perp \& d^\perp))} \qquad\qquad \dfrac{e^\perp \vdash \qquad \dfrac{\vdash c^\perp \quad \vdash d^\perp}{c \oplus d \vdash}}{\vdash e \otimes (l^\perp \oplus (c^\perp \& d^\perp))}$$

et en ludique correspondent aux desseins suivants :

$$\dfrac{\xi.1 \vdash \qquad \xi.2 \vdash}{\vdash \xi} \qquad\qquad \dfrac{\xi.1 \vdash \qquad \dfrac{\vdash \xi.3.1 \quad \vdash \xi.3.2}{\xi.3 \vdash}}{\vdash \xi}$$

Les stratégies de Bob correspondent aux deux débuts de preuves suivants (en logique linéaire) :

$$\dfrac{\vdash e^{\perp}, l \qquad \dfrac{\vdash e^{\perp}, c}{\vdash e^{\perp}, c \oplus d}}{\dfrac{\vdash e^{\perp}, l\&(c \oplus d)}{\vdash e^{\perp} \wp l\&(c \oplus d)}} \qquad \dfrac{\vdash e^{\perp}, l \qquad \dfrac{\vdash e^{\perp}, d}{\vdash e^{\perp}, c \oplus d}}{\dfrac{\vdash e^{\perp}, l\&(c \oplus d)}{\vdash e^{\perp} \wp l\&(c \oplus d)}}$$

qui peuvent être écrites sous forme focalisée :

$$\dfrac{\vdash e^{\perp}, l \qquad \dfrac{c^{\perp} \vdash e^{\perp}}{\vdash e^{\perp}, c \oplus d}}{e \otimes (l^{\perp} \oplus (c^{\perp} \& d^{\perp}) \vdash} \qquad \dfrac{\vdash e^{\perp}, l \qquad \dfrac{d^{\perp} \vdash e^{\perp}}{\vdash e^{\perp}, c \oplus d}}{e \otimes (l^{\perp} \oplus (c^{\perp} \& d^{\perp}) \vdash}$$

et en ludique correspondent aux desseins suivants :

$$\dfrac{\vdash \xi 1, \xi 2 \qquad \dfrac{\xi.3.1 \vdash \xi 1}{\vdash \xi.1, \xi.3}}{\xi \vdash} \qquad \dfrac{\vdash \xi 1, \xi 2 \qquad \dfrac{\xi.3.2 \vdash \xi 1}{\vdash \xi.1, \xi.3}}{\xi \vdash}$$

Chacun des dessins d'Alice ”normalise” avec chacun de ceux de Bob.
Ce qui revient à dire que chaque fois que Alice (resp. Bob) commet une action, Bob (resp. Alice) possède dans son registre une action correspondante. Par exemple, les deux dessins ci-dessus concernant Alice peuvent se commenter de la façon suivante :

- Alice accepte le contrat proposé par Bob et donne un euro
- elle choisit un livre

ou bien

- Alice accepte le contrat proposé par Bob et donne un euro
- elle choisit un CD ou un DVD

De son point de vue, ce sont des actions *positives*.
De son côté, les ”desseins” de Bob peuvent se commenter par :

- Bob propose un contrat
- Contre un euro, Bob est prêt à donner un livre
- mais contre un euro, il est prêt aussi à donner un CD

ou bien :

- Bob propose un contrat
- Contre un euro, Bob est prêt à donner un livre
- mais contre un euro, il est prêt aussi à donner un DVD

De son point de vue, ce sont des actions positives, mais du point de vue d'Alice, ce sont des actions *négatives* (des contre-actions). Donc si nous regardons les choses du point de vue d'Alice, une ”partie” est une alternance de coups négatifs et positifs. Une telle partie peut être par exemple :

1. Bob propose le contrat (action $-$, à partir d'une localisation de départ $<>$, et qui consiste en une certaine proposition **P**, se résumant dans l'ensemble d'ensembles $\{\{$l$\}$, $\{$c, d$\}\}$),
2. Alice accepte le contrat et le manifeste en donnant un euro et en faisant son choix (action $+$, à partir de la localisation $<> .\mathbf{P}$, avec un ensemble I qui est soit $\{$l$\}$ soit $\{$c, d$\}$),
3. elle aurait pu refuser le contrat en jouant autre chose, par exemple en ne faisant aucun choix ($\emptyset$)
4. à la fin, Alice, si elle a accepté le contrat et si Bob l'a respecté, accuse réception ($+$, $\dagger$)

2.3 Interaction et orthogonalité

2.3.1 Interaction

L'élimination de la règle de coupure a toujours été vue comme l'aspect dynamique de la logique. Là encore, elle le montre, mais comme cas d'*interaction*. J-Y. Girard définit l'interaction de la façon suivante :
L'interaction est la coïncidence de deux lieux en position duale dans deux dess(e)ins différents.
Remarque : la coupure n'est jamais explicitée en tant que règle dans le système.
Dire qu'ils sont en position duale signifie qu'ils peuvent être reliés par une coupure. Avec cette présentation, on voit apparaître une notion importante d'*orthogonalité*. On pouvait s'en douter dès le début, avec cette idée d'opposer des *preuves* à des *contre-preuves*. Quel meilleur moyen de formaliser cette idée que d'utiliser la notion d'orthogonalité ? Dans un espace vectoriel, deux sous-espaces sont orthogonaux si et seulement si leur intersection se réduit à l'espace $\{0\}$, c'est-à-dire le sous-espace nul. Et évidemment le vecteur nul est orthogonal à lui-même, et c'est le seul sous-espace à posséder cette propriété. En ludique, le rôle du vecteur nul doit être tenu par une preuve particulière. Il s'agit bien sûr du *daimon* (qui est à la fois preuve et contre-preuve). Deux *para-preuves* sont orthogonales l'une à l'autre si leur interaction conduit au *daimon*, autrement dit s'il y a consensus : le jeu s'arrête parce que les deux joueurs se sont mis d'accord pour arrêter la partie. On dit aussi que les deux objets *convergent*.
La notion d'interaction (conduisant éventuellement au *daimon*) va être précisée dans ce qui suit.

2.3.2 Dessins et desseins

Il est temps de donner une définition plus précise de ce que l'on entend par un *dessein* pour mieux différencier cette notion de celle de *dessin*.

Définition 1 *Un* **dessin** *est un arbre dont tous les noeuds sont des* **fourches** $\Gamma \vdash \Delta$ *dont la racine est appelée* **base** *(ou conclusion), et qui est construit en utilisant :*

- *le daimon*
- *la règle positive*
- *la règle négative*

A la différence, un *dessein* est un ensemble de chroniques. Une *chronique* est une suite alternée de coups (ou *actions*). Plus précisément :

Définition 2 *Une* **chronique** *de base* $\Gamma \vdash \Delta$ *est une suite non vide alternée d'actions* $k_0, ..., k_n$*, où* $k_i = (\epsilon, \xi_i, I_i)$*,* ϵ *étant une polarité,* ξ_i *une adresse et* I_i *un ensemble d'entiers, de telle sorte que :*

- *si la base est négative (resp. positive),* k_0 *a la polarité* $-$ *(resp.* $+$*),*
- *seule la dernière action,* k_n *peut être le daimon = (*$+, \dagger$*),*
- *si on appelle* **foyer** *le lieu de la formule active, une action négative* k_i *a pour foyer soit l'élément unique de* Γ *(auquel cas c'est la première action), soit un élément de* $\xi_{i-1} \star I_{i-1}$*,*
- *une action positive* k_i *a pour foyer un élément* ξ_i *de* Δ *ou bien un élément de* $\xi_q \star I_q$*, où* $(-, \xi_q, I_q)$ *est une action négative précédente,*
- *les foyers sont deux à deux distincts*

On peut tenter de mettre cette définition en pratique sur l'exemple des biens immobiliers. Nous avons donné plus haut comme exemple de chronique :

$$(+, <>, \{0\}), (-, 0, \{1, 3\}), (+, 01, \{1\}), (-, 011, \{i\})\dagger$$

La base étant positive (X commence le dialogue par une question), k_0 est de polarité $+$, son adresse est la suite vide et l'ensemble choisi est $\{0\}$. k_1 est de polarité négative, son foyer coïncide avec le seul élément de $\xi_0 \star I_0$, noté "0". k_2 est positive, son foyer est un élément de $\xi_1 \star I_1 = \{01, 03\}$, en l'occurrence ici 01. k_3 est négative, son foyer est un élément de $\xi_2 \star I_2 = \{011\}$, en l'occurrence ici 011. La dernière action enfin est positive et consiste dans le *daimon*.
On a vu que d'autres suites pouvaient fournir des chroniques, comme :

$$(+, <>, \{0\}), (-, 0, \{2, 3\}), \dagger$$

Dans l'exemple de Bob et Alice, pour trouver les chroniques, il suffit de raisonner en termes d'adresses.

1. Bob démarre l'échange en proposant le contrat 1 à partir d'une adresse $<>$, c'est un "coup" qui se représente par $(+, <>, \{1\}$,
2. ensuite, selon le choix que peut faire Alice, il se prépare à ce qu'elle choisisse le livre : $(-, 1, \{1, 2\})$, ou à ce qu'elle choisisse la surprise (un CD ou un DVD) : $(-, 1, \{1, 3\})$,
3. si Alice a choisi le livre, Bob fera une action positive : $(+, 12, \{1\})$,
4. si elle a choisi la surprise, Bob fera l'action positive $(+, 13, \{1\})$ ou bien $(+, 13, \{2\})$

D'où, du point de vue de Bob, les chroniques suivantes :
$(+, <>, \{1\}), (-, 1, \{1, 2\}), (+, 12, \{1\})$
$(+, <>, \{1\}), (-, 1, \{1, 3\}), (+, 13, \{1\})$
$(+, <>, \{1\}), (-, 1, \{1, 3\}), (+, 13, \{2\})$
Du point de vue d'Alice, on a les chroniques :
$(-, <>, \{1\}), (+, 1, \{1, 2\}), (-, 12, \{1\}), (+, \dagger)$
$(-, <>, \{1\}), (+, 1, \{1, 3\}), (-, 13, \{1\}), (+, \dagger)$
$(-, <>, \{1\}), (+, 1, \{1, 3\}), (-, 13, \{2\}), (+, \dagger)$
Cette définition des chroniques et des desseins comme ensemble de chroniques permet de comprendre pourquoi une partie (identifiée à une chronique) n'est pas simplement une suite d'applications de règles, car si c'était le cas alors on s'attendrait à ce que les coups négatifs soient associés non pas à des ensembles I comme c'est le cas ici, mais à des ensembles d'ensembles.
On peut encore préciser le sens de *dessein*.

Définition 3 *Un* **dessein** *de base* $\Gamma \vdash \Delta$ *est un ensemble* $\mathcal{D}$ *de chroniques de base* $\Gamma \vdash \Delta$ *tel que :*

– *$\mathcal{D}$ est une forêt,*
– *les chroniques de $\mathcal{D}$ sont deux à deux cohérentes (si deux chroniques diffèrent, c'est à partir d'une action négative, et à partir de ce moment-là, elles n'ont plus jamais les mêmes foyers),*
– *si une chronique s'arrête, alors sa dernière action est positive,*
– *si la base est positive, alors $\mathcal{D}$ est non vide.*

Pour illustrer ces définitions, nous allons regarder un autre exemple, également proposé par Myriam Quatrini. Il s'agit d'un dialogue entre deux personnes qui se disputent à propos d'une proposition présentée par un parti écologiste.

- Le proposant (**P**) : *il faut limiter la vitesse à 60 km/h sur route et 30 km/h en ville*
- L'opposant (**O**) : *on ne peut quand même pas toujours interdire les choses qui sont sources de plaisir !*
- **P** : *l'interdiction de fumer dans les lieux publics est pourtant bien acceptée !*
- **O** : *fumer ne sert à rien pour la collectivité, alors qu'il est nécessaire que les gens se déplacent à une vitesse raisonnable*

Ce dialogue peut être représenté par une pseudo-chronique :

$$(+, <>, 0), (-, 0, \{1\}), (+, 01, \{1\}), (-, 0, \{2\})$$

ce qui signifie : le proposant P fait, au premier tour de parole, la proposition logée à l'adresse 0, à partir d'une adresse de base représentée par la suite vide. L'opposant prend pour *foyer* la concaténation de son adresse initiale est de celle où le proposant a mis sa proposition, et il avance un nouvel ensemble d'adresse ($\{1\}$), où il met son argument. Le proposant reprend la parole à partir de l'adresse 01 (qui résume les deux tours de paroles précédents), mais l'opposant, loin de rependre la parole à partir de l'adresse 011, repart à partir de 0, pour avancer un nouvel argument (celui de "ce qui sert à la collectivité"). On peut dire que cet exemple illustre deux choses ;

– du point de vue des chroniques, l'importance de la restriction portant sur les actions négatives (qui doivent partir d'une adresse fournie par l'action immédiatement précédente),
– du point de vue du dialogue, le fait qu'un tel mouvement de l'opposant soit ressenti comme un refus de poursuivre l'argumentation sur le chemin qu'elle avait pris jusque là : il y a bifurcation dans l'argumentation. Intuitivement, on peut dire qu'il n'y a pas à proprement parler de convergence des desseins

Le dialogue peut en effet être représenté par :

$$\begin{array}{cc}
O & \\
\vdots & P \\
\vdash 02 & \vdots \\
\hline
011 \vdash & \vdash 011 \\
\hline
\vdash 01 & 01 \vdash \\
\hline
0 \vdash & \vdash 0 \\
\hline
\vdash <> & <> \vdash \\
\hline
\end{array}$$

O viole la contrainte qui oblige à choisir, pour une action négative, un lieu parmi ceux qui viennent d'être créés par P.
Le dialogue serait ressenti comme "plus acceptable" par le partenaire P s'il respectait cette contrainte. Dans notre exemple, ce pourrait être le cas avec la configuration suivante :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash}\,\dagger}{011 \vdash}}{\vdash 01} \qquad \vdash 02}{0 \vdash}}{O :\vdash <>} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash 011}\,\emptyset}{01 \vdash}}{\vdash 0}}{P :<>\vdash}}{}$$

Dans ce cas, O "ferme la branche" qui répond à l'argument de P : il y a consensus (ou plutôt ici *concession*) qui est marqué par l'usage de la règle du *daimon*, mais il a ouvert au préalable une autre branche au moyen de l'adresse 02, qu'il peut maintenant explorer : le pas suivant consistera à ce que P reparte de cette adresse (cf. définition des chroniques ci-dessus). Cette interaction correspondrait à un dialogue du genre :

- Le proposant (**P**) : *il faut limiter la vitesse à 60 km/h sur route et 30 km/h en ville*
- L'opposant (**O**) : *on ne peut quand même pas toujours interdire les choses qui sont sources de plaisir !*
- **P** : *l'interdiction de fumer dans les lieux publics est pourtant bien acceptée !*
- **O** : *oui en effet tu as raison [***concession***]. Ceci dit, fumer ne sert à rien pour la collectivité, alors qu'il est nécessaire que les gens se déplacent à une vitesse raisonnable.*

Dans ces exemples, nous avons mis une coupure (trait horizontal sous deux bases de polarités opposées) comme symbole de l'interaction entre deux partenaires du dialogue. On peut entrer davantage dans la dynamique de la coupure et de son élimination.

Définition 4 *Une* **coupure** *est la coïncidence de deux lieux dans les bases de deux desseins.*

On rencontre souvent une coupure entre $\vdash \xi$ et $\xi \vdash$, c'est ce que l'on appelle un réseau clos.

Définition 5 *Un* **réseau clos** *consiste dans le cas d'une coupure entre les deux desseins suivants :*

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}\\ \vdots\end{matrix}}{\vdash \xi}\,\kappa \qquad \dfrac{\begin{matrix}\mathcal{E}\\ \vdots\end{matrix}}{\xi \vdash}\,(\xi,\mathcal{N})}{}$$

Définition 6 *La normalisation d'un tel réseau est telle que :*

– *si κ est le daimon, alors la forme normalisée (coupure éliminée) est :*

$$\dfrac{}{\vdash}\,\dagger$$

(ce réseau normalisé est appelé dai)

– *si $\kappa = (\xi, I)$, alors si $I \notin \mathcal{N}$, la normalisation échoue,*

– *si $\kappa = (\xi, I)$ et $I \in \mathcal{N}$, alors on considère, pour tout $i \in I$ le dessein $\mathcal{D}_\rangle$, sous-dessein de $\mathcal{D}$ de base $\xi \star i \vdash$, ainsi que le sous-dessein $\mathcal{E}'$ de $\mathcal{E}$, de base $\vdash \xi \star I$, et on remplace $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ par, respectivement, la suite des $\mathcal{D}_\rangle$ et $\mathcal{E}'$.*
Autrement dit, le réseau de départ est remplacé par :

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_{i_1}\\ \vdots\end{matrix}}{\xi \star i_1 \vdash} \quad \ldots \quad \dfrac{\begin{matrix}\mathcal{E}'\\ \vdots\end{matrix}}{\vdash \xi \star i_1, \ldots, \xi \star i_n} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_{i_n}\\ \vdots\end{matrix}}{\xi \star i_n \vdash}}{}$$

avec une coupure entre chaque $\xi \star i_j \vdash$ et la "formule" $\xi \star i_j$ correspondante du dessein $\mathcal{E}'$

Cette définition formalise l'intuition évoquée plus haut d'une interaction qui se termine sur un consensus (ou qui au contraire diverge, comme c'est la cas lorsque $I \notin \mathcal{N}$).
De plus l'orthogonalité peut maintenant bien se définir.

Définition 7 *Un dessein $\mathcal{D}$ est orthogonal à un dessein $\mathcal{E}$ $(\mathcal{D} \perp \mathcal{E})$ si et seulement si l'élimination de la coupure entre les deux conduit au réseau dai.*

Regardons comment l'on prouve l'orthogonalité de deux desseins, en reprenant l'exemple des biens immobiliers. Soit les deux desseins suivants, reliés par coupure à la base :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\ldots \vdash 011i, 02\ldots}\dagger}{011 \vdash 02}(011, \{i; i \in \mathbb{N}\})}{\vdash 01, 02}}{0 \vdash}}{\vdash <>} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{011i \vdash}{\vdash 011}}{01 \vdash} \quad 02 \vdash}{\vdash 0}}{<> \vdash}}{}$$

On peut, en plusieurs étapes, faire remonter la coupure. Par exemple, une première étape conduit à :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\ldots \vdash 011i, 02\ldots}\dagger}{011 \vdash 02}(011, \{i; i \in \mathbb{N}\})}{\vdash 01, 02}}{0 \vdash} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{011i \vdash}{\vdash 011}}{01 \vdash} \quad 02 \vdash}{\vdash 0}}{}$$

puis une deuxième étape à :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{011i \vdash}{\vdash 011}}{01 \vdash} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\ldots \vdash 011i, 02\ldots}\dagger}{011 \vdash 02}(011, \{i; i \in \mathbb{N}\})}{\vdash 01, 02} \qquad 02 \vdash}{}$$

où on a scindé en deux le dessein de X, pour plus de lisibilité, et où il faut voir en fait une coupure entre $01 \vdash$ et le 01 qu'il y a dans $\vdash 01, 02$ d'un côté et une autre entre le 02 qu'il y a dans $\vdash 01, 02$ et $02 \vdash$ de l'autre.

Une troisième étape conduit à :

$$\dfrac{\dfrac{011i \vdash}{\vdash 011} \quad \dfrac{\dfrac{}{\ldots \vdash 011i, 02\ldots}\,\dagger}{011 \vdash 02}\,(011, \{i; i \in \mathbb{N}\}) \quad 02 \vdash}{}$$

puis on obtiendra :

$$\dfrac{011i \vdash \quad \dfrac{}{\vdash 011i, 02}\,\dagger \quad 02 \vdash}{}$$

avec coupure entre $011i \vdash$ et le $011i$ qui figure dans la suite de séquents $\{\vdash 011i, 02; i \in \mathbb{N}\}$, ainsi qu'entre le 02 et $02 \vdash$. Comme chacune des coupures possède un membre obtenu par le *daimon*, l'interaction converge vers dai.

3 Les comportements

3.1 Relation d'ordre sur les desseins

On peut définir une relation d'ordre partiel entre les desseins.

Définition 8 *$\mathcal{D} \preceq \mathcal{D}'$ si et seulement si tout dessein orthogonal à $\mathcal{D}$ est aussi orthogonal à $\mathcal{D}'$ ($\mathcal{D}^\perp \subset \mathcal{D}'^\perp$)*

Dans *From foundations to Ludics* ([6]), Girard précise cette définition : $\mathcal{D} \preceq \mathcal{D}'$ signifie que $\mathcal{D}'$ est "plus convergent" que $\mathcal{D}$. On peut imaginer que $\mathcal{D}'$ a été obtenu à partir de $\mathcal{D}$ au moyen de deux opérations :

Elargissement : on ajoute davantage de prémisses pour les règles négatives, autrement dit on remplace $\mathcal{N}$ par $\mathcal{N}' \supset \mathcal{N}$ (autrement dit, moins de branches du dialogue vont conduire au dissensus),

Raccourcissement : certaines règles positives (ξ, I) sont remplacées par de simples occurrences du *daimon* (sur certaines branches, le dialogue s'arrête plus vite)

Avec cette relation, on peut rechercher le plus petit et le plus grand dessein. Le plus petit n'est pas un dessein à proprement parler, il conduit le plus souvent au dissensus, il n'a aucune branche et c'est l'ensemble vide de chroniques. Girard l'a appelé *Foi* (foi en la convergence bien sûr...). Le plus grand converge tout le temps et... tout de suite (!) c'est donc le *daimon*.

On peut distinguer un *daimon* positif et un *daimon* négatif.
Daimon positif :

$$\frac{}{\vdash \Lambda}\;\dagger$$

Daimon négatif :

$$\frac{\ldots \quad \dfrac{}{\vdash \xi \star I, \Lambda}\;\dagger \quad \ldots}{\xi \vdash \Lambda}\;(\xi, \wp_f(\mathbb{N}) \backslash \{\emptyset\})$$

Si on prend $\mathcal{N} = \emptyset$ dans la règle positive, alors évidemment... quelque soit le mouvement fait par l'autre joueur, il y aura dissensus (le proposant n'a vraiment pas assez d'information pour répondre aux attaques de l'adversaire !). Ce cas est représenté par le *sconse* :

$$\frac{}{\xi \vdash}\;(\xi, \emptyset)$$

En regardant l'exemple du dialogue immobilier, on voit que le dessein de X ($\mathcal{D}_X$) est orthogonal à de nombreux desseins possibles de Y, son orthogonal contient donc tous ces desseins. On peut imaginer maintenant un autre dessein, $\mathcal{D}'_X$ qui serait orthogonal à encore plus de desseins : autrement dit où X aurait prévu encore plus de coups de la part de l'adversaire. Ce dessein contiendrait davantage de chroniques se terminant par un *daimon*, et même des chroniques se développant à partir d'autres actions négatives (et conduisant aussi au *daimon*).
Si on considère maintenant l'orthogonal de $\mathcal{D}^{\perp}$, alors évidemment il contient $\mathcal{D}$, mais il contient aussi tous les desseins $\mathcal{D}'$ tels que $\mathcal{D} \preceq \mathcal{D}'$. Autrement dit, il est *stable* par sur-dessein.

Définition 9 *Un* **comportement** *est un ensemble de desseins (de même base)* **C** *qui est égal à son bi-orthogonal (***C** = **C**$^{\perp\perp}$*).*

3.2 Quelques comportements particuliers

Avec cette définition, on peut définir le comportement induit par un dessein $\mathcal{D}$, c'est le bi-orthogonal de l'ensemble $\{\mathcal{D}\}$. Dans l'exemple traité jusqu'à maintenant, il contient tous les sur-desseins de $\mathcal{D}_X$, en particulier le *daimon* de base $\vdash <>$, dessein qui ne figurait pas dans notre exemple en tant que dessein de X, mais qui désormais, pourrait très bien être choisi, il correspondrait par exemple à une sortie immédiate du dialogue, avant même

d'avoir posé la question initiale !
Autre exemple : considérons le dessein suivant :

$$\frac{}{\vdash \xi} \, (\xi, \emptyset)$$

Il est très particulier. C'est un dessein positif, autrement dit lié au *proposant*. Dans le cadre consensuel, l'opposant n'a pas beaucoup de choix puisqu'il ne peut choisir aucune adresse pour répondre (le proposant n'en ayant donné aucune), il ne peut donc opposer que le *daimon*, autrement dit avouer qu'il a perdu ! Girard appelle ce dessein la *Bombe atomique* (!) puisque c'est l'arme absolue ! Son seul dessein orthogonal est donc :

$$\frac{\frac{}{\vdash} \, \dagger}{\xi \vdash}$$

mais ce dernier dessein est également orthogonal à :

$$\frac{}{\vdash \xi} \, \dagger$$

donc on a un comportement (stable par biorthogonalité) qui contient deux desseins : la *bombe* et le *daimon*. On note **1** ce comportement (ce sera l'élément neutre du tenseur).
Mais à la place de la *Bombe*, on peut prendre le *sconse* et chercher le comportement (négatif) qui le contient. On le note $\top$. Quel est l'orthogonal de $\top$? Puisque l'autre ne me donne aucun ensemble d'adresses pour jouer, je ne peux que jouer le *daimon*, autrement dit, je m'avoue vaincu. On obtient :

$$\top^{\perp} = Dai$$

et

$$\top = Dai^{\perp}$$

c'est-à-dire tous les desseins négatifs de même base.

3.3 Incarnation

Etant donné un dessein $\mathcal{D}$ appartenant à un comportement **C**, il existe dans **C** un plus petit élément contenu dans $\mathcal{D}$ qui est, en quelque sorte, son meilleur représentant, on l'appelle l'*incarnation de $\mathcal{D}$ par rapport à* **C**. C'est la plus petite partie d'un dessein qui soit nécessaire pour identifier un comportement, c'est-à-dire pour assurer son appartenance à un comportement. Nous verrons plus loin l'utilité de cette notion avec notre manière de retrouver, à partir de la ludique, les connecteurs de la logique linéaire, dont le *avec* (&).

4 Liens avec la logique traditionnelle

4.1 Localisation et délocalisation

4.1.1 Vérité et fausseté

Le fait d'avoir une notion de *gain* permet de réintégrer une certaine idée de "vérité" : un comportement est vrai quand il contient un dessein gagnant, faux quand son orthogonal est vrai. Avec cette caractérisation, deux desseins incarnant deux comportements orthogonaux ne peuvent pas être vrais tous les deux. Ou alors, s'ils sont gagnants, ils ne sont pas orthogonaux, ce qui veut dire que leur dispute se poursuit indéfiniment. Mais il peut y avoir des comportements ni vrais ni faux, c'est le cas si les deux joueurs abandonnent.
Notons ici que la notion de "vérité" pour un comportement n'est pas très adéquate... Peut-être devrait-on parler de comportement *fructueux* ?

4.1.2 Formules et comportements

Il faut noter qu'un comportement est un ensemble de desseins exactement comme, en logique intuitionniste, on interprète une formule comme l'ensemble de ses preuves. On est ainsi conduit à la correspondance :

formule	comportement
preuve	dessein

Parler de l'intersection de deux comportements, c'est parler de l'intersection de deux formules. En logique intuitionniste, cela a un sens évident : un élément de cet ensemble prouve A et prouve B donc prouve A$\wedge$B, mais en ludique, les choses ne fonctionnent pas aussi simplement. La notion de *formule*, en tant qu'entité "spiritualiste" s'est évaporée, remplacée par celle de *lieu*. Il y a donc deux manières de parler d'intersection ou d'union, l'une prend en compte cet aspect matériel, "concret" des formules (leur emplacement) et l'autre prend en compte la capacité qu'on a de les "délocaliser" (en particulier au moyen du *Fax*).

4.1.3 Point de vue "localiste" vs point de vue "spiritualiste"

Il est clair qu'en théorie des ensembles, l'union est *localiste* : elle dépend étroitement (et pour cause !) des éléments que chaque ensemble renferme. Si on prend deux isomorphismes quelconque ϕ et ψ, on n'aura pas en général $X \cup Y = \phi(X) \cup \psi(Y)$. Par exemple, il ne suffit pas de connaître le nombre d'éléments de X et celui de Y pour connaître celui

de $X \cup Y$.
Par contre, on peut faire la somme disjointe de deux ensembles X et Y. Pour cela, il va falloir justement choisir deux bijections ϕ et ψ telles que $\phi(X)$ et $\psi(Y)$ soient d'intersection vide et on aura bien sûr : $Card(X+Y) = Card(X)+Card(Y)$. La somme disjointe est donc *spiritualiste*.
On a la même chose pour le produit. Le produit cartésien classique est spiritualiste, on a : $Card(X \times Y) = Card(X) \times Card(Y)$. Qu'est-ce, dans ce cas, que l'analogue de l'union (localiste) ? Girard donne comme exemple le "produit" de deux ensembles de parties $\wp(X)$ et $\wp(Y)$, noté $\wp(X) \boxtimes \wp(Y)$ et défini comme $\wp(X \cup Y)$, autrement dit l'ensemble $\{x \cup y; x \in X \wedge y \in Y\}$.
En ludique, on peut faire comme dans le cas de l'union disjointe. Si un lieu σ est donné, on peut définir deux applications particulières ϕ et ψ, qui seront des *délocalisations* :

$$\phi(\sigma \star i \star \tau) = \sigma \star 2i \star \tau \qquad \psi(\sigma \star i \star \tau) = \sigma \star (2i+1) \star \tau$$

Les images par ϕ et ψ d'un dessin seront encore des dessins. Si **G** et **H** sont des comportements de même base σ, alors $\phi(\mathbf{G})$ et $\psi(\mathbf{H})$ sont disjoints (comme dans le cas de l'union disjointe entre deux ensembles X et Y). Ou plus exactement, lorsqu'il s'agit de comportements positifs, leur intersection se limite au plus petit comportement possible sur une base positive, à savoir **0** = $\{Dai\}$ et quand il s'agit de comportements négatifs, tout dessein $\mathcal{D}$ appartenant aux deux est tel que l'intersection entre son incarnation par rapport à l'un et son incarnation par rapport à l'autre est vide.

4.1.4 Sommes et produits

Si A est un ensemble arbitraire de desseins, alors A$^{\perp}$ est un comportement (puisque A$^{\perp\perp\perp}$ = A$^{\perp}$). Réciproquement, tout comportement sur une base $<>\vdash$ ou sur une base $\vdash<>$ est l'orthogonal d'un ensemble de desseins. Par exemple, si A = $\emptyset$, A$^{\perp}$ va être l'ensemble des desseins qui convergent à partir d'aucun autre, c'est-à-dire qui ne convergent contre rien d'autre que Dai. C'est $\top$, le comportement qui contient le *sconse* (ou : dont le *sconse* est l'incarnation).
Maintenant, puisque les comportements sont des ensembles, rien n'empêche d'en faire les unions, intersections et produits. On peut démontrer :

- *L'intersection de deux comportements est un comportement*

On peut aussi définir un comportement à partir d'une union, bien que ce ne soit pas direct. On va poser :

$$\mathbf{G} \sqcup \mathbf{H} = (\mathbf{G} \cup \mathbf{H})^{\perp\perp}$$

Ceci va nous permettre de retrouver les connecteurs de la logique linéaire.

4.1.5 Additifs

Le cas des additifs correspond au cas où les comportements sont disjoints. Que signifie le fait que deux comportements soient disjoints ?

Définition 10 *On appelle* **répertoire** *un sous-ensemble de $\wp_f(\mathbb{N})$ (= un ensemble de "ramifications"). Si* **G** *est un comportement positif sur $\vdash <>$, alors le répertoire de* **G**, *qu'on note $Dir(\mathbf{G})$ est l'ensemble des ensembles d'indices I tels que :*
$(+, <>, I)$ soit la première action d'un dessein figurant dans **G**.
Si **G** *est un comportement négatif sur $\xi \vdash$, alors le répertoire de* **G** *est l'ensemble des ensembles d'indices I pour lesquels, quel que soit le dessein incarné dans* **G**, *il a comme action initiale une action $(-, \xi, I)$.*

Cette définition entraîne (P. L. Curien p.43) :

– le répertoire de **G** et celui de $\mathbf{G}^{\perp}$ sont identiques.

Définition 11 *Deux comportements* **G** *et* **G'** *sur la même base sont dits disjoints si leurs répertoires sont disjoints.*

Si deux comportements négatifs sont disjoints et si $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont des incarnations de ces comportements, alors leur union est bien définie, et c'est un dessein de $\mathbf{G} \cap \mathbf{H}$. Sa première action a pour ensemble de ramifications l'union de celui de $\mathcal{D}_1$ et de celui de $\mathcal{D}_2$, c'est donc bien un dessein à la fois dans **G** et dans **H**, mais c'est en même temps un couple de desseins, ce qui conduit à :

$$|\mathbf{G}| \times |\mathbf{H}| = |\mathbf{G} \cap \mathbf{H}|$$

où $|\mathbf{G}|$ dénote l'ensemble des incarnations par rapport à **G**. Autrement dit, tout dessein incarné de $\mathbf{G} \cap \mathbf{H}$ s'obtient en prenant un dessein incarné dans **G** et un dessein incarné dans **H** en faisant l'union des chroniques. C'est ce que Girard appelle... le *mystère de l'incarnation* !... (le fait que l'intersection coïncide avec le produit cartésien).
On peut alors définir les connecteurs additifs.

Définition 12 *Si* **G** *et* **H** *sont deux comportements négatifs disjoints, alors on pose :*

$$\mathbf{G} \& \mathbf{H} = \mathbf{G} \cap \mathbf{H}$$

S'ils sont positifs, on pose :

$$\mathbf{G} \oplus \mathbf{H} = \mathbf{G} \sqcup \mathbf{H}$$

D'une manière générale, on peut dire que $\oplus$ est un connecteur ''spiritualiste'', au même sens que l'union disjointe puisque, dans le cas général, il faut procéder à des délocalisations pour le définir, alors que $\sqcup$ est toujours défini et est ''localiste'' dans le même sens que l'union ensembliste.
Par exemple, si **H** est un comportement positif, on peut définir sans difficulté le comportement **H** $\sqcup$ **H** (il est égal **H**), mais on peut aussi utiliser ϕ et ψ pour obtenir deux copies isomorphes de chaque dessein de **H** et fabriquer **H**$\oplus$**H**.
Pour le cas négatif, reprenons un exemple proposé par Myriam.
Soit **G**=$\{\mathcal{D}_c\}^{\perp\perp}$ la donnée d'un couple de coordonnées et **H**=$\{\mathcal{F}_f\}^{\perp\perp}$ la donnée d'une forme (on suppose par exemple que 5 code un cercle). Les desseins $\mathcal{D}_c$ et $\mathcal{F}_f$ peuvent respectivement s'interpréter comme les ''attitudes'' à avoir pour être prêt à répondre à une question portant sur les coordonnées et à une question portant sur la forme. Une fois que ces desseins sont définis, ils peuvent être amenés à interagir, produisant alors à titre de *traces* de leur interaction, des dialogues comme :

$\mathcal{D}_c$:

- *donne-moi deux coordonnées*
- *je te donne 3 pour l'abscisse et 4 pour l'ordonnée*
- *t'es cool*

$\mathcal{F}_f$:

- *donne-moi une forme*
- *je te donne un cercle*
- *super !*

c'est-à-dire :

$\mathcal{D}_c$:

$$\cfrac{\cfrac{1.3 \vdash \qquad 1.4 \vdash}{\vdash 1}}{<>\vdash}$$

$\mathcal{F}_f$:

$$\cfrac{\cfrac{2.5 \vdash}{\vdash 2}}{<>\vdash}$$

Ces deux comportements sont disjoints (intuitivement, les réponses possibles à la question de la forme ne sont pas bonnes pour la question des coordonnées et vice-versa), leur conjonction additive est donc leur intersection, laquelle s'obtient en prenant pour répertoire l'union des deux répertoires (le répertoire "coordonnées" et le répertoire "forme") et en faisant le dialogue sur cette base, ce qui donnerait :

$$\dfrac{\dfrac{1.3\vdash \quad 1.4\vdash}{\vdash 1} \quad \dfrac{2.5\vdash}{\vdash 2}}{<>\vdash}$$

où le proposant peut demander *au choix* les coordonnées *ou* la forme.
On peut noter ce qui se passe si les comportements ne sont pas disjoints, par exemple si les deux desseins qui sont censés les incarner ont tous les deux la même ramification (ici $\{1\}$) au départ (dans l'exemple, cela veut dire qu'il s'agit de deux fois la même question, celle des coordonnées), alors évidemment, les réponses peuvent ne pas être stables, ce qui pourrait conduire à de fâcheuses contradictions, par exemple :

$$\dfrac{\dfrac{1.3\vdash \quad 1.4\vdash}{\vdash 1} \quad \dfrac{1.2\vdash \quad 1.4\vdash}{\vdash 1}}{<>\vdash}$$

Dans ce cas, on a **G**$\cap$**H** = $\top$. Rappelons que $\top$ désigne le comportement incarné par le *sconse*, lequel est un dessein négatif dont l'ensemble de ramifications est vide. Si $\mathcal{D}_1$ est le dessein qui donne la réponse (3, 4) et $\mathcal{D}_2$ celui qui donne la réponse (2, 4), alors si $\mathbf{G}$ est le comportment engendré par $\mathcal{D}_1$ et $\mathbf{H}$ celui engendré par $\mathcal{D}_2$, $\mathbf{G} \cap \mathbf{H}$ ne contient ni $\mathcal{D}_1$ ni $\mathcal{D}_2$. Par exemple $\mathbf{G}$ contient tous les desseins négatifs $\mathcal{D}$ tels que si leur ensemble de ramifications contient $\{1\}$, alors $\mathcal{D}$ se continue comme $\mathcal{D}_1$. Ce n'est bien sûr pas le cas de $\mathcal{D}_2$, mais c'est le cas du *sconse*. Ainsi le *sconse* est le seul dessein dans $\mathbf{G} \cap \mathbf{H}$, donc $\mathbf{G} \cap \mathbf{H} = \{sconse\} = \top$.

4.1.6 Multiplicatifs

Définition 13 *Soient $\mathcal{U}$ et $\mathcal{B}$ deux desseins positifs, on définit le produit tensoriel $\mathcal{U} \odot \mathcal{B}$ par :*
- *si un des deux est le daimon, alors $\mathcal{U} \odot \mathcal{B} = Dai$,*
- *sinon, soient $(+, <>, I)$ et $(+, <>, J)$ les premières actions respectives de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{U}$, si $I \cap J \neq \emptyset$ alors $\mathcal{U} \odot \mathcal{B}$ = Dai. Sinon on remplace dans chaque chronique de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{U}$ la première action par $(+, <>, I \cup J)$, ce qui donne respectivement $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{U}'$, et alors $\mathcal{U} \odot \mathcal{B} = \mathcal{U}' \cup \mathcal{B}'$.*

On peut ensuite définir le produit tensoriel $\otimes$ entre deux comportements au moyen de délocalisations. Ces délocalisations (par exemple les fonctions ϕ et ψ vues plus haut, qui

envoient les biais qui suivent le lieu de la base soit vers des entiers pairs soit vers des entiers impairs) permettent de faire en sorte que les premières actions respectives des deux desseins qui incarnent les deux comportements aient des ramifications disjointes. Ensuite on peut définir le produit $\odot$ de deux comportements par : $\mathbf{F} \odot \mathbf{G} = \{\mathcal{A} \odot \mathcal{B}; \mathcal{A} \in \mathbf{F}, \mathcal{B} \in \mathbf{G}\}$, puis le tenseur proprement dit par : $\mathbf{F} \otimes \mathbf{G} = (\mathbf{F} \odot \mathbf{G})^{\perp\perp}$.
Sous réserve de complétude (au sens de *full completeness*), qui signifiera qu'en réalité, on ne gagne rien en prenant le bi-orthogonal, on aura le fait que tout dessein $\mathcal{D}$ dans $\mathbf{F} \otimes \mathbf{G}$ peut se décomposer selon $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \odot \mathcal{D}_2$ avec $\mathcal{D}_1 \in \mathbf{F}$ et $\mathcal{D}_2 \in \mathbf{G}$.
Prenons un exemple. Soit **G** = $\{\mathcal{D}^{\perp\perp}\}$, où $\mathcal{D}$ est le dessein :

$$\dfrac{\dfrac{}{0 \vdash}\,(0, \emptyset)}{\vdash <>}\,(<>, \{0\})$$

autrement dit : je pose la question 0, puis je n'ouvre aucune possibilité de réponse à mon opposant, donc bien sûr, je gagne ! Calculons $\mathbf{G} \odot \mathbf{G}$. Comme $I \cap J \neq \emptyset$, la définition nous donne : $\mathbf{G} \odot \mathbf{G}$ = Dai, autrement dit le comportement qui contient comme unique dessein :

$$\dfrac{}{\vdash <>}\,\dagger$$

C'est le comportement qui perd d'emblée ! D'où le fait qu'on puisse très bien avoir :

$$vrai \odot vrai = faux$$

Myriam donne l'interprétation suivante. Imaginons que **G** soit le comportement engendré par un dessein $\mathcal{D}$ consistant en la possibilité d'avancer un argument 0 à partir de la situation localisée en $<>$. Soit **H** le comportement engendré par le dessein $\mathcal{E}$ suivant :

$$\dfrac{\ldots \quad \dfrac{}{\vdash n}\,\dagger \quad \ldots}{<> \vdash}\,(-, <>, \{\{n\}; n \in \mathbb{N}\})$$

qui peut s'interpréter comme :
donne-moi un argument (n) - et quand tu me l'auras donné, j'abandonnerai - je ferai usage de mon daimon
Bien sûr, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ sont orthogonaux, donc $\mathcal{D} \in \mathbf{H}^{\perp}$, ce qu'on traduit en disant que **G** est gagnant contre **H**. De plus, **G** est *vrai* puisqu'il a un dessein gagnant. Mais **G** ne contient pas que $\mathcal{D}$, il contient aussi des desseins délocalisés de $\mathcal{D}$. par exemple, nous avons vu que l'argument donné dans $\mathcal{D}$ était 0, on peut maintenant imaginer une variante

avec l'argument étant 1. Soit $\mathcal{D}'$ cette variante, c'est un dessein de base $<>\vdash$ et sa seule chronique est : $(<>, \{1\}), (1, \emptyset)$. Etudions alors $\mathcal{D} \odot \mathcal{D}$ et $\mathcal{D} \odot \mathcal{D}'$. $\mathcal{D} \odot \mathcal{D}'$ n'est plus orthogonal à $\mathcal{E}$, donc il n'appartient plus à $\mathbf{H}^\perp$. A quoi est-il orthogonal ? à ce qu'on obtient avec un autre dessein, $\mathcal{E}'$ du genre :

$$\frac{\ldots \quad \dfrac{}{\vdash n, n'}\dagger \quad \ldots}{<>\vdash} (\{\{n, n'\}; n, n' \in \mathbb{N}, n \neq n'\})$$

qui, cette fois, s'interprète comme "donne-moi deux arguments, et j'abandonne". $\mathcal{D} \odot \mathcal{D}'$ étant orthogonal à $\mathcal{E}'$, $\mathcal{D} \odot \mathcal{D}'$ appartient à l'orthogonal du comportement $\mathbf{H}'$ engendré par $\mathcal{E}'$. Mais si nous considérons $\mathcal{D} \odot \mathcal{D}$, alors par définition, on obtient Dai, et $\mathbf{G} \odot \mathbf{G} = \{Dai\}$, il ne peut donc pas être gagnant. Si je n'ai qu'un seul argument à donner, je ne peux évidemment pas en donner deux... D'où le fait que si **G** est gagnant contre *donne-moi un argument*, pour que **G** $\odot$ **G** soit vrai, il faudrait qu'il converge avec un **H'** qui s'interpréterait comme *donne-moi deux arguments*, ce qui n'est pas le cas.
Le produit tensoriel marque ainsi, comme on s'y attendait, une sensibilité aux ressources. Du point de vue d'un dialogue "parfait" (*notion à définir plus tard !*), chaque question appelle une (et une seule ?) réponse et il est rare qu'une réponse satisfasse à deux questions en même temps !

5 Uniformité et logique des prédicats

5.1 Qu'est-ce que l'uniformité ?

Nous avons aperçu au paragraphe 4.1.5 la possibilité d'une contradiction entre les réponses à une même question (par exemple posée à deux moments différents). Il est important de se prémunir contre une telle éventualité. La définition donnée des connecteurs y parvient. En effet, dans le cas où on fait la conjonction & de deux comportements sur la même base (ou plus généralement non disjoints), s'ils s'incarnent dans des desseins qui ne donnent pas la même réponse à la question localisée dans les deux desseins au même endroit, on obtient $\top$, c'est-à-dire le comportement qui ne contient que le *sconse*, autrement dit l'être asocial.
Le problème est beaucoup plus sérieux dès que nous acceptons la possibilité qu'il y ait des variables, soit du premier ordre, soit du second ordre. En ce cas nous devons avoir des adresses pour ces variables. Chaque chronique peut porter mention de telles adresses, auquel cas il faut s'assurer que la réaction est constante d'une chronique à l'autre.
Reprenons ici l'exemple donné par Marie-Renée Fleury lors du séminaire de Grenoble.

Supposons que Suzy ait un certain nombre de fiches à remplir. Ces fiches sont des ensembles I de questions. Certaines questions peuvent très bien revenir sur plusieurs fiches (par exemple la date de naissance). Un dessein pour Suzy est le suivant :

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\vdash \xi \star J} \;\; \dots \;\; \dfrac{\vdots}{\vdash \xi \star I}}{\xi \vdash} \; (\xi, \wp_f(\mathbb{N}))$$

Autrement dit, elle doit être prête à remplir les fiches $I, J, etc.$
Le dessein sera dit *uniforme* si, chaque fois qu'une même question i apparaît, Suzy répond de la même façon.
Grâce à une condition d'uniformité, la ludique peut s'adapter à la logique linéaire du second ordre (**MALL**$_2$). Rappelons qu'au commencement de ce texte, nous sommes partis des preuves en logique linéaire propositionnelle, pour ensuite les "désincarner". Le but poursuivi par les travaux sur l'uniformité consiste à faire la même chose mais en partant de la logique linéaire du second ordre. On atteint d'ailleurs en procédant de cette manière le *sens profond* de la ludique. En "déconstruisant" les preuves, on ne s'attend pas à trouver des "propositions élémentaires", mais des variables du second ordre. Il n'y a pas de comportements élémentaires *a priori*. On a le théorème suivant ("full completeness") :

> *Soit F une Π_1-formule de* **MALL**$_2$*. Un "bon" dessein du comportement associé à F de base $\vdash \xi$ correspond à une preuve de F dans* **MALL**$_2$.

Nous caractériserons intuitivement ce qu'on entend par un "bon" dessein dans le comportement associé à une formule F en disant qu'il s'agit d'un dessein

- qui ne se termine pas par le *daimon*,
- qui se termine par des *Fax*,
- et qui est **uniforme**

Pour éclairer encore cette dernière notion, voici d'autres exemples. Supposons qu'un garçon, *Bob* s'apprête à répondre à la question σ = *est-ce que tu fumes ?*, posée par des personnes différentes, par exemple sa mère, sa copine et sa soeur, représentées respectivement par les ensembles d'adresses I, J, K. Bien sûr, selon la personne qui pose la question, la réponse peut varier entre σ_1 (oui) et σ_2 (non). Le dessein de *Bob*, que nous noterons $\mathcal{F}$ est donc un dessein de base $\xi \vdash \sigma$ qui prend l'allure suivante :

$$\dfrac{\dots \;\; \dfrac{\vdots}{\vdash \xi \star I, \sigma}\,(\sigma, I) \;\; \dots \;\; \dfrac{\vdots}{\vdash \xi \star J, \sigma}\,(\sigma, J) \;\; \dots}{\xi \vdash \sigma} \; (\xi, \wp_f(\mathbb{N}))$$

Formellement, l'uniformité se traduira ici par le fait que chaque fois que nous "couperons" ce dessein avec un dessein partiel de **F**, nous obtiendrons la *même* preuve.
Or, ici, selon la "personne" I ou J (représentée par son propre dessein qui consiste à poser à *Bob* la question σ en s'attendant à une réponse oui ou non), on va obtenir une interaction différente, puisque si cette personne est la mère de *Bob*, la réponse est non et si elle est la copine, la réponse est oui. Ici, **F** = $\{\mathcal{D}_I, \mathcal{D}_J\}^{\perp\perp}$, c'est le comportement de questionnement de *Bob*, il contient le dessein de la mère et le dessein de la copine, soit :

$$\mathcal{D}_I = \cfrac{\vdots}{\vdash \xi}\,(\xi, I) \qquad\qquad \mathcal{D}_J = \cfrac{\vdots}{\vdash \xi}\,(\xi, J)$$

En normalisant, on obtient respectivement :

$$\cfrac{\cfrac{\vdots}{\sigma \star 1 \vdash}}{\vdash \sigma}\,(\sigma, I) \qquad\qquad \cfrac{\cfrac{\vdots}{\sigma \star 2 \vdash}}{\vdash \sigma}\,(\sigma, J)$$

ce qui "montre" la non-uniformité puisque $\sigma \star 1 = non$ et que $\sigma \star 2 = oui$.
Un autre exemple est celui d'un dessein $\mathcal{F}$ de base $\xi \vdash \sigma$ correspondant à une preuve de **F** $\vdash$ **G** $\oplus$ **H**. Par exemple *Bob a un appartement à Marseille et une maison à La Ciotat, plusieurs administrations lui demandent son adresse principale. Selon l'organisme, sa réponse peut varier*. Son dessein est alors :

$$\mathcal{F} = \cfrac{\cfrac{\cfrac{\vdots}{\sigma \star 1 \vdash \xi \star I}}{\vdash \xi \star I, \sigma}\,(\sigma, 1) \qquad \cfrac{\cfrac{\vdots}{\sigma \star 2 \vdash \xi \star J}}{\vdash \xi \star J, \sigma}\,(\sigma, 2)}{\xi \vdash \sigma}\,(\xi, \wp_f(\mathbb{N}))$$

On lui pose la question σ. Il répond soit 1 (Marseille), soit 2 (La Ciotat) selon l'organisme I ou J qui pose la question.
Si on coupe, comme précédemment, le dessein $\mathcal{F}$ par les desseins partiels $\{\mathcal{D}_I, \mathcal{D}_J\}$ définis ci-dessus, et si on normalise, on obtient respectivement :

$$\cfrac{\cfrac{\vdots}{\sigma \star 1 \vdash}}{\vdash \sigma}\,(\sigma, 1) \qquad\qquad \cfrac{\cfrac{\vdots}{\sigma \star 2 \vdash}}{\vdash \sigma}\,(\sigma, 2)$$

et on ne peut pas associer de preuve à $\mathcal{F}$ puisque dans un cas, on obtient un dessin pour $\mathbf{F} \vdash \mathbf{G}$ et dans l'autre un dessin pour $\mathbf{F} \vdash \mathbf{H}$

5.2 Logique des prédicats du premier ordre

Aux formules usuelles avec quantificateur $\forall x P(x)$ et $\exists x P(x)$, on associe les comportements : $\&_{d \in \mathbf{D}} \mathbf{C}_d$ et $\oplus_{d \in \mathbf{D}} \mathbf{C}_d$.

à continuer...

6 Ludique et Pragmatique

Nous avons déjà donné plusieurs indications dans ce qui précède concernant les liens entre la ludique et la notion de dialogue, notamment à partir de deux petits exemples choisis pour leur capacité illustrative : celui de la demande de renseignements sur la vente de biens immobiliers, et celui d'une argumentation à partir d'une proposition formulée par un proposant **P** face à un opposant **O**. Ces deux exemples sont bien sûr réduits et il peut sembler aventureux de prétendre en tirer de grands enseignements. Ils ont pourtant mis en lumière plusieurs observations théoriques utiles pour une théorie du dialogue.

6.1 Une notion d'interaction formellement définie

On a mis en évidence une notion de *convergence* dans le dialogue, qui possède une définition entièrement formelle, interne à la dynamique du dialogue et ne reposant sur aucune règle dialogique *a priori*. Cette notion de convergence repose sur celle d'interaction, rendue possible par la dynamique d'élimination des coupures. Il y a convergence quand cette dynamique conduit à un dialogue élémentaire, qu'on peut voir comme l'essence du consensus (nous sommes d'accord pour arrêter la discussion en un point particulier)

6.2 Une reformulation des principes de la pragmatique

On sait que, depuis Grice ([7]), la pragmatique repose sur des axiomes, dont fait partie le **Principe de Coopérativité** (*"que votre contribution conversationnelle corresponde à ce qui est exigé de vous, au stade atteint par celle-ci, par le but ou la direction acceptés de l'échange parlé dans lequel vous êtes engagé"*). Ce principe est totalement représenté dans le processus de normalisation dans le cas d'un réseau clos. Dans *From foundations to Ludics*, Girard admet une interprétation de la ludique comme "sémantique des jeux".

L'usage du *daimon* correspond à l'abandon et, de ce fait, autorise une notion de *gain* dans le dialogue (par exemple dans le cas d'une argumentation), c'est alors un cas particulier de dialogue consensuel (puisque les deux joueurs se mettent au moins d'accord pour savoir qui gagne et qui perd), mais il peut y avoir des dialogues non consensuels, c'est-à-dire qui ne convergent pas au sens de la procédure de normalisation. Girard dit : ”nous imposerons la chose suivante : les deux joueurs peuvent bien faire ce qu'ils veulent, pourvu qu'ils restent consensuels, c'est--dire que toutes leurs disputes convergent. C'est l'idée de *jeu par consensus*”.
On sait aussi que l'hypothèse *du sujet rationnel* est souvent faite dans les travaux sur le dialogue et sur la conversation sans que l'on puisse bien savoir d'où peut provenir cette rationalité ni comment on peut la caractériser opérationnellement. Dans sa *Théorie de l'Agir communicationnel* ([8]), Habermas tente de s'affranchir de toute définition métaphysique de la rationalité et fait de cette dernière un produit de l'interaction, plutôt qu'un point de départ. Si l'intention est louable, il n'est pas sûr que le philosophe réussisse à accomplir son projet car il semble qu'il y ait toujours une circularité qui s'introduit quelque part, l'hypothèse de rationalité étant toujours déjà au moins en partie faite dès qu'on veut étudier un dialogue de manière concrète. On peut peut-être sortir de ce cercle en faisant une hypothèse beaucoup plus faible que la rationalité, qui serait alors simplement le fait de l'uniformité. Nous avons vu en section 5 que cette notion intuitive (reposant sur l'idée que les desseins représentatifs de comportements sont stables au travers du temps, que par exemple, il sera répondu de manière constante à la même question répétée plusieurs fois) pouvait aussi revêtir une définition formelle. Ainsi que l'ont explicité Claudia Faggian, Marie-Renée Fleury et Myriam Quatrini ([4]), un dessein est uniforme si chaque fois qu'on essaie de le mettre à l'épreuve de certains tests (les desseins partiels), on obtient le même résultat. La condition d'uniformité suffit à retrouver une authentique logique des prédicats.

6.3 Une nouvelle double articulation du langage

La notion de *lieu* nous a permis de nous éloigner (au moins un temps) de la syntaxe concrète des formules : une *règle dialogique* n'est pas une règle guidée par l'emploi d'un connecteur de la logique classique, c'est quelque chose de beaucoup plus général et abstrait, se caractérisant par une certaine *géométrie*. On peut sans doute faire l'inventaire de ces formes géométriques. De même que du point de vue strictement logique (celui de Girard) on ne sait pas *a priori* sur quelle logique on va tomber, du point de vue du dialogue, on ne sait pas non plus *a priori* quelles sont les *figures* qui vont émerger.
Les opérations sur les comportements, vues dans la dernière section, montrent comment on peut fabriquer de nouveaux comportements (donc des dialogues) à partir de briques

élémentaires. Par exemple, deux dialogues portant sur une demande de renseignements peuvent donner lieu par un $\&$ à un dialogue offrant davantage d'alternatives, ou par un *tenseur* à un dialogue cumulé.
Une ambition du projet PRELUDE serait de montrer comment à partir d'un dialogue concret, on peut le décomposer en de telles briques élémentaires.
D'où l'idée d'une nouvelle *double articulation* du langage. La première, on le sait, a été formulée par A. Martinet ([13]), et elle existe entre le niveau de la *phonologie* et celui de la *grammaire*. Elle prend en compte le fait qu'à ces deux niveaux, des unités minimales (*phonèmes* d'un côté, *morphèmes* ou *monèmes* de l'autre) s'organisent pour produire des unités plus grandes. Mais, d'où viennent ces unités elles-mêmes ? Elles sont le produit d'un découpage qui part d'une substance sonore générale organisée dans le but de communiquer du *sens* et qui trouve son fondement dans l'interaction verbale (à la base de l'action concertée etc.). Le langage aussi contient des indices de polarité (cf. l'exposé de Claire Beyssade), qu'on peut peut-être voir comme les résidus d'une interaction dialogique.
Au niveau le plus fondamental, on pourrait considérer que les unités de langue proviennent d'une combinaison de mouvements dans le dialogue, dont on rechercherait les plus élémentaires. Ces unités de dialogue élémentaires contiendraient elles-mêmes des unités d'un autre plan, celui des présumées *significations littérales*, combinées au moyen d'un autre système (ici, on peut reprendre la sémantique de Montague, améliorée avec la théorie des continuations pour la rendre dynamique, et avec la notion d'*hyperintension* pour la rendre moins grossière ([14]).

6.4 Vers une théorie des formes de l'argumentation

Les exemples donnés dans le corps de ce texte étaient déjà quelques indications sur les "briques élémentaires" du dialogue. Par exemple, nous avons vu :

- demande de renseignement :
  – *pouvez-vous me donner l'heure ?*
  – *il est 13h45*
  – *merci (= daimon)*
- argumentation simple, avec une concession :
  proposant ϕ,
  opposant *non, car* ψ,
  proposant *pourtant* η *(*allant dans la direction de $\neg\psi$*),*
  opposant *tu as raison, mais (*autre argument*) :* ξ,

On peut noter que, dans le premier cas, on peut avoir aussi :

– *pouvez-vous me donner l'heure ?*
– *je n'ai pas de montre.*

– *ah, bon, excusez-moi (= daimon)*

Cela dépend de l'ensemble d'adresses initial sur lequel s'entame le dialogue. Notre théorie du dialogue basée sur la ludique ne dit rien sur le caractère normal ou anormal d'un dialogue. Dans le dialogue présent, deux cas peuvent se présenter. Soit le premier locuteur (le questionneur) n'a pas prévu que la personne à qui il s'adresse puisse ne pas avoir de montre, soit il l'a prévu. Dans le premier cas, il y a dissensus, mais pas dans le deuxième. On peut même prévoir des situations plus marginales (en apparence) comme :

– *pouvez-vous me donner l'heure ?*
– *je vous en prie, cessez de m'importuner.*
– *... (= daimon)*

où le *daimon* est bien littéralement l'abandon ! ici, pour que le dialogue converge en dépit de son apparence dissensuelle, il faut simplement supposer que le questionneur avait un tout autre but (un tout autre dessein !) que savoir l'heure, par exemple draguer la personne à qui il ou elle s'adresse. L'enrichissement des répertoires des desseins joue ainsi le rôle d'un accroissement des connaissances sur la situation au sein de laquelle se déroule le dialogue. La notion de *présupposé* doit pouvoir entrer dans cette vision des choses.

Les formes de l'argumentation contiennent aussi les *paralogismes* (cf. 1.2), ce que les auteurs anglo-saxons nomment aussi *fallacies* (cf [9]). Il sera intéressant de voir si on peut développer une théorie de ces *raisonnements fallacieux,* en les décomposant au sein de la ludique, montrant en cela que le *daimon* est un paralogisme suffisant pour engendrer les autres. Mais peut-être n'est-ce pas le cas, alors il faudra voir quels paralogismes introduire, quitte à faire dévier la logique "naturelle" sous-jacente à la ludique.

Exemple de paralogisme :

A une émission de radio dont l'invité était P. de Villiers (22/08/06) :

Question d'une auditrice *: Pour vous, quelle est la définition de "être français" ?*

Réponse de l'homme politique *: Etre français, c'est avoir la nationalité française. D'ailleurs, je ferai changer les conditions d'attribution de la nationalité.*

Ce dialogue est de la forme suivante :

A *: Donnez-moi ϕ,*

B *: Pour vous donner ϕ, je vous donne ψ, mais pour avoir ψ, il faut que vous ayez ϕ*

Exercice(!) : donner une représentation de ce dialogue en ludique.

6.5 Une théorie "procédurale" de la signification

La notion de lieu a d'autre part ceci de fondamental qu'elle oblige à considérer chaque énonciation dans le dialogue comme une inscription particulière en un temps et une place déterminés. A la lettre, aucune *énonciation* n'est identique à une autre, même s'il existe des procédures (ici le *Fax*) permettant de les *spiritualiser*, c'est-à-dire de reconnaître une

”identité de signification” entre deux énonciations, mais l’accent est mis ici sur la nécessité d’une procédure pour cela. L’identité de signification ne va pas de soi, elle est construite.
Nous retrouvons dans cette approche un point de vue proche de celui de Wittgenstein sur le sens, qui n’a jamais été beaucoup développé dans le cadre des études formelles, et qui surtout, n’a jamais été vraiment rendu opérationnel, point de vue selon lequel le *sens* d’une expression est dans son usage. Ce qui fait, en ludique, le ”sens” d’un *dessein*, c’est l’ensemble de ceux avec lesquels il converge (ou normalise). Autrement dit, il n’y a pas d’attribution de signification en dehors de la mise en contact avec d’autres desseins, qui, tous, agissent comme des *épreuves* vis-à-vis du dessein testé.

6.6 Vers une étude des types de stratégie dans le dialogue

Nous avons fait surgir la notion de *comportement*. Pour cela, étant donné une stratégie dans un dialogue, nous cherchons toutes celles, émanant de l’autre participant, qui peuvent converger avec elle, puis toutes les stratégies qui convergent avec ces dernières : on obtient un ensemble ”complet” et stable qui définit une sorte de classe de stratégies à laquelle on donne le nom de *comportement*. Certains comportement sont d’ores et déjà répertoriés (le *sconse*[2] par exemple, connu pour son caractère asocial : aucune stratégie de dialogue ne converge avec lui ! c’est le comportement le plus radical, celui de l’impossibilité d’une entente), mais on peut tenter de faire une analyse fine des types de stratégie conduisant à faire émerger des ”comportements” qui pourraient correspondre à des types clairement identifiés de mouvements dans le dialogue, comme la *concession*, le *retrait*, *l’acceptation d’un compromis* etc.

Références

[1] J-M. Andréoli. Logic programming with focusing proofs in linear logic. *The Journal of Logic and Computation*, 2(3) :297–347, 1992.

[2] A. Blass. A game semantics for linear logic. *Annals of Pure and Applied Logic*, 56 :183–220, 1992.

[3] P.L. Curien. Introduction to linear logic and ludics, part ii. Technical report, CNRS & Université Paris VII, http ://www.pps.jussieu.fr/ curien/LL-ludintroII.pdf, 2003.

[2]Girard a donné ce nom au dessein en question à cause de la caractéristique supposée de ce petit animal, qui serait de faire fuire tout le monde à cause du liquide d’odeur repoussante qu’il est capable d’émettre. C’est bien sûr très injuste pour cette pauvre bête, qui ne fait ainsi que se défendre contre les prédateurs et en particulier les ours, qui lui sont une bonne centaine de fois supérieurs en taille !

[4] Claudia Faggian, Marie-Renée Fleury, and Myriam Quatrini. An introduction to uniformity in ludics. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[5] J.Y. Girard. On the meaning of logical rules-i. In U. Berger and H. Schwichtenberg, editors, *Computational Logic*, pages 215–272. Springer-Verlag, 1999.

[6] J.Y. Girard. From foundations to ludics. *Bulletin of Symbolic Logic*, 09(2) :131–168, 2003.

[7] H. P. Grice. Logic and conversation. In P. Cole and J. L. Morgan, editors, *Syntax and Semantics, vol.III, Speech Acts*, pages 41–58. Academic Press, 1975.

[8] Jurgen Habermas. *Theorie des kommunikativen Handels*. Suhrkamp, Francfort, 1981.

[9] C. L. Hamblin. *Fallacies*. Vale Press, Newport News, 2004.

[10] Jaako Hintikka. *La vérité est-elle ineffable ?* L'éclat, Combas, 1994.

[11] K. Lorenz. *Arithmetik und Logik als Spiele*. Dissertation, Universität Kiel, 1961.

[12] P. Lorenzen. Logik und agon. *Atti. Congr. Internat. di Filosofia*, 4 :187–194, 1960.

[13] André Martinet. *Eléments de linguistique générale*. Armand Colin, Paris, 1960.

[14] Carl Pollard. Hyperintensional semantics in a higher-order logic with definable subtypes. Technical report, The Ohio State University, 2006.

[15] S. Rahman and H. Rückert. Dialogical connexive logic. *Synthese*, 127 :105–139, 2001.